Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, juni 1990.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Giv et formelt bevis, med henvisning til de benyttede slutningsregler og logiske identiteter, for at følgende logiske argument er gyldigt

$$\begin{array}{c} \neg(P \to Q) \\ P \to (\neg Q \to R) \\ \neg R \vee S \\ \hline S \ . \end{array}$$

OPGAVE 2.

Lad S og T være ikke tomme mængder, og lad $f : S \to T$ være en afbildning. For en vilkårlig delmængde $A \subseteq S$ defineres

$$F(A) = \{f(s) : s \in A\} \subseteq T,$$

($F(A)$ er billedmængden af A ved afbildningen f), og herved fastlægges en afbildning F fra mængden $\mathcal{P}(S)$ af delmængder af S ind i mængden $\mathcal{P}(T)$ af delmængder af T, altså $F : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(T)$.

Vis, at f er injektiv ('one-to-one') hvis og kun hvis F er injektiv.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Lad M være en ikke tom mængde og betragt en afbildning $f : M \to M$. Vi benytter betegnelserne $f^0 = 1_M$ (den identiske afbildning på M), og $f^{n+1} = f^n \circ f$ for $n \geq 0$ (sammensætning af afbildninger). Lad S betegne fællesmængden af billedmængderne $f^n(M)$ for $n \geq 0$, altså

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(M) = f^0(M) \cap f^1(M) \cap f^2(M) \ldots$$

(1) Vis, at der gælder $f^n(M) \supseteq f^{n+1}(M)$ for alle $n \geq 0$.
(2) Vis, at $f(S) \subseteq S$.
(3) Vis, at hvis f er injektiv ('one-to-one') gælder $S = f(S)$. (Gør f.eks. rede for, at der til $y \in S$ findes $x \in M$ så $y = f(x)$, og vis, at et sådant x tilhører $f^n(M)$ for alle $n \geq 0$.)

OPGAVE 4.

Vis, at der for alle naturlige tal n gælder, at summen

$$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{3}{10}n$$

er et helt tal.

OPGAVE 5.

Lad Σ betegne et endeligt alfabet, og lad $f : \Sigma \to \Sigma$ være en afbildning. Mængden af endelige ord skrevet med symboler fra Σ, der betegnes $\Sigma^\star$, er defineret rekursivt ved:

(B) det tomme ord ϵ tilhører $\Sigma^\star$,
(R) hvis $w \in \Sigma^\star$ og $x \in \Sigma$ så gælder $wx \in \Sigma^\star$.

(1) Gør rede for, at f giver anledning til en afbildning $F : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$, som opfylder betingelserne $F(\epsilon) = \epsilon$ og $F(wx) = F(w)f(x)$ for $w \in \Sigma^\star$ og $x \in \Sigma$.
(2) Vis, at der for alle $w_1, w_2 \in \Sigma^\star$ gælder $F(w_1 w_2) = F(w_1)F(w_2)$.
(3) Vis, at hvis f er surjektiv ('onto' dispositionsmængden), så er F ligeledes surjektiv.

OPGAVE 6.

På mængden $S = \{a, b, c, d\}$ betragtes relationen R fastlagt ved,

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, b\rangle\}.$$

(1) Opskriv den Boolske matrix for R.
(2) Beregn for alle naturlige tal $n \geq 1$ relationen R^n, samt den transitive afslutning $t(R)$ af R (beskrevet ved de tilhørende Boolske matricer).
(3) Angiv orienterede grafer til illustration af de fundne relationer.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

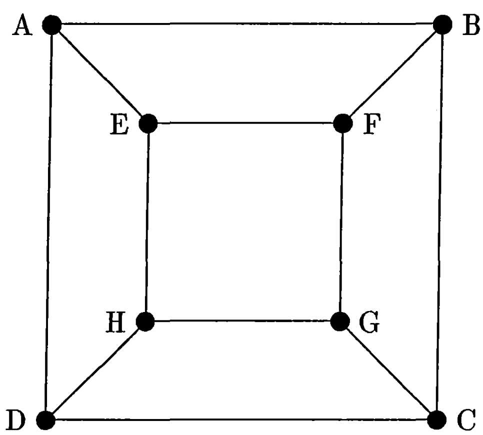
Betragt den vægtede graf G med knudemængde $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, hvor vægtmatricen W er givet ved tabellen,

W	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	∞	∞	2	∞	∞
v_2	∞	∞	∞	∞	7
v_3	∞	5	∞	∞	∞
v_4	2	8	4	∞	∞
v_5	∞	∞	∞	3	∞

(1) Find ved brug af Warshall's algoritme minimalvægtsmatricen W^* for G (de under udførelsen af algoritmen beregnede matricer skal angives).
(2) Undersøg om G indeholder cykler.
(3) Tegn en illustration af G, og angiv en vej af minimal vægt fra v_1 til v_4.

OPGAVE 8.

Find ved brug af Prim's algoritme et minimalt udspændende træ i nedenstående vægtede graf, idet knuden A vælges som den første knude.



Vægtene for kanterne er givet ved:

kant	AB	AD	AE	BC	BF	CD	CG	DH	EF	EH	FG	GH
vægt	6	12	5	8	7	10	9	11	1	4	2	3

For hvert gennemløb af algoritmen skal angives listen af allerede valgte knuder, og listen over kanter (med tilhørende kantlængder) der undersøges.