

## DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnerne kan benyttes. Opgavesættet omfatter otte opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

### OPGAVE 1.

Giv et formelt bevis, med henvisning til de benyttede slutningsregler og logiske identiteter, for at følgende logiske argument er gyldigt

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg P \wedge R \rightarrow S \\ \neg Q \end{array}}{S \vee \neg R} .$$

### OPGAVE 2.

Lad  $S$  og  $T$  være ikke tomme mængder, og betragt en afbildning  $f : S \rightarrow T$ .

(1) Vis, at der for vilkårlige delmængder  $A, B \subseteq S$  gælder

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{og} \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(2) Vis ved et eksempel, at der ikke i almindelighed gælder:  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

(3) Vis, at hvis  $f$  er injektiv ('one-to-one'), så gælder for alle delmængder  $A, B \subseteq S$ , at

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Lad  $S_1, T_1, S_2$  og  $T_2$  være ikke tomme mængder og betragt afbildninger  $f_1 : S_1 \rightarrow T_1$  og  $f_2 : S_2 \rightarrow T_2$ . Ved

$$h(\langle s_1, s_2 \rangle) = \langle f_1(s_1), f_2(s_2) \rangle \text{ for } \langle s_1, s_2 \rangle \in S_1 \times S_2,$$

defineres en afbildning  $h : S_1 \times S_2 \rightarrow T_1 \times T_2$ .

- (1) Vis, at  $h$  er injektiv ('one-to-one') hvis og kun hvis  $f_1$  og  $f_2$  begge er injektive.
- (2) Vis, at  $h$  er surjektiv ('onto' dispositionsmængden) hvis og kun hvis  $f_1$  og  $f_2$  begge er surjektive.

OPGAVE 4.

Vis, at der for alle naturlige tal  $n$  gælder, at tallet

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3,$$

er deleligt med 9.

OPGAVE 5.

Betragt alfabetet  $\Sigma = \{f, (, ), x\}$ , altså med bogstaverne 'f', '(', ')' og 'x'. En delmængde  $U$  af  $\Sigma^*$  defineres rekursivt ved:

(B)  $x \in U$ , og

(R) hvis  $w \in U$  gælder  $f(w) \in U$  (mere eksplicit, hvis  $w$  er et ord tilhørende  $U$ , vil ordet dannet ved bogstaverne: 'f', '(', efterfulgt af ordet  $w$ , efterfulgt af ')', ligeledes tilhøre  $U$ ).

- (1) Angiv 3 forskellige ord tilhørende  $U$ .
- (2) Giv en rekursiv definition af antallet  $P(w)$  af '(' for ord  $w$  tilhørende  $U$ .
- (3) Vis, at der for alle  $w \in U$  gælder,

$$3 \cdot P(w) + 1 = \text{length}(w),$$

hvor  $\text{length}(w)$  er længden af tegnstrengen  $w \in \Sigma^*$ .

OPGAVE 6.

På mængden  $S = \{a, b, c, d, e\}$  betragtes relationen  $R$  fastlagt ved,

$$R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle\}.$$

- (1) Opskriv den Booleske matrix for  $R$ .
- (2) Beregn for alle naturlige tal  $n \geq 1$  relationen  $R^n$ , samt den transitive afslutning  $t(R)$  af  $R$  (beskrevet ved de tilhørende Booleske matricer).
- (3) Angiv orienterede grafer til illustration af de fundne relationer.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 7.

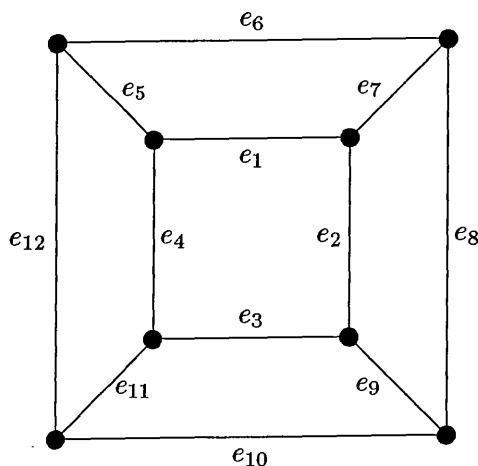
Betragt den vægtede graf  $G$  med knudemængde  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ , hvor vægtmatricen  $W$  er givet ved tabellen,

$W$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
$v_1$	$\infty$	3	4	$\infty$	5
$v_2$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1
$v_3$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	$\infty$
$v_4$	2	6	$\infty$	$\infty$	8
$v_5$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

- (1) Find ved brug af Warshall's algoritme minimalvægtsmatricen  $W^*$  for  $G$  (de under udførelsen af algoritmen beregnede matricer skal angives).
- (2) Undersøg om  $G$  indeholder cykler.
- (3) Tegn en illustration af  $G$ , og angiv en vej af minimal vægt fra  $v_3$  til  $v_5$ .

OPGAVE 8.

Find ved brug af Kruskal's algoritme et minimalt udspændende træ i nedenstående vægtede graf.



Vægtene for kanterne er givet ved:

kant	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$	$e_{11}$	$e_{12}$
vægt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

For hver kant  $e_i$ , der "forkastes" ved det  $i$ 'te gennemløb i algoritmen, skal angives en cykel indeholdende  $e_i$  og tidligere valgte kanter.