Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, maj 1989.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter fem opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Giv et formelt bevis, med henvisning til de benyttede slutningsregler og logiske identiteter, for at følgende logiske argument er gyldigt

$$\begin{array}{rcl} (P \wedge Q) & \Rightarrow & \neg R \\ S & \Rightarrow & P \\ R & & \\ \hline Q & \Rightarrow & \neg S\ . \end{array}$$

OPGAVE 2.

Lad E være en ikke tom mængde og betragt den binære operation $\oplus$ på mængden af delmængder $\mathcal{P}(E)$ af E givet ved,

$$A_1 \oplus A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) \quad \text{for} \quad A_1, A_2 \in \mathcal{P}(E),$$

hvor $-$ som sædvanlig betegner mængde-differens.
(1) Gør rede for, f.eks. ved brug af Venn diagrammer, at $\oplus$ er kommutativ og associativ.
(2) Vis, f.eks. ved induktion, at for $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E)$ og elementer $x \in E$ gælder, at $x \in A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$, hvis og kun hvis $x \in A_i$ for et ulige antal af i'er.

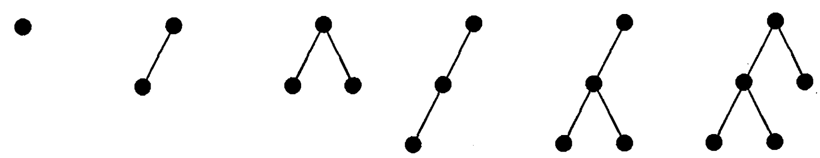
(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Lad T være et binært træ med rod r og blade $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Her gælder $n \geq 1$, og hvis $n = 1$, så er $r = b_1$. Idet l_i betegner længden af den entydigt bestemte vej fra roden til bladet b_i, defineres *vægten* $V(T)$ af træet T, ved

$$V(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{l_i}}.$$

(1) Beregn $V(T)$ for nedenstående binære træer:



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6

(2) Antag, at roden r i T har to sønner a og b. Disse bestemmer to deltræer T_a og T_b af T. Vis, at der gælder: $V(T) = \frac{1}{2}(V(T_a) + V(T_b))$.
(3) Antag, at roden r i T har netop én søn a. Denne bestemmer et deltræ T_a af T. Vis, at der gælder: $V(T) = \frac{1}{2}V(T_a)$.
(4) Vis, at der for ethvert træ T gælder: $V(T) \leq 1$, og at $V(T) = 1$ hvis og kun hvis T er fuldstændigt.

OPGAVE 4.

Betragt for et positivt helt tal k funktionen $f : I+ \to I+$ givet ved

$$f(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

(1) Gør rede for, at der gælder: $f(n) \leq n^{k+1}$ for $n \in I+$.
(2) Vis, at der gælder: $f(n) \geq \frac{1}{2^{k+1}} n^{k+1}$ for alle lige $n \in I+$, dvs. alle n af formen $n = 2m$ for $m \in I+$.
(3) Diskuter den asymptotiske opførsel af funktionen f, udtrykt ved $\mathcal{O}$-notation.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 5.

Betragt mængden $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ og den ved nedenstående tabel definerede binære operation $\circ$ på M. Denne operation er associativ (dette skal ikke bevises).

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e	f
c	a	c	e	a	c	e
d	a	d	a	d	a	d
e	a	e	c	a	e	c
f	a	f	e	d	c	b

(1) Undersøg om operationen $\circ$ er kommutativ, og angiv et eventuelt nul-element og et eventuelt ét-element.
(2) Angiv fire forskellige undersemigrupper af $\langle M, \circ \rangle$.
(3) Gør rede for, at mængden $M' = \{b, f\}$ forsynet med den binære operation $\circ$ på naturlig måde kan opfattes som en gruppe, og beskriv inversoperationen i denne gruppe.