Københavns Universitet, Matematisk Institut
Naturvidenskabelig embedseksamen, januar 1989.

DISKRET MATEMATIK

Opgaver til besvarelse i fire timer.
Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan benyttes.
Opgavesættet omfatter seks opgaver. Besvarelsen af opgavesættet vurderes som en helhed.

OPGAVE 1.

Giv et formelt bevis, med henvisning til de benyttede slutningsregler og logiske identiteter, for at følgende logiske argument er gyldigt

$$\begin{array}{rcl} (\neg Q \wedge R) & \Rightarrow & \neg P \\ \neg R \vee S & & \\ Q & \Rightarrow & \neg S \\ \hline R & \Rightarrow & \neg P\ . \end{array}$$

OPGAVE 2.

Fibonaccitallene f_n er for $n \geq 0$ fastlagt rekursivt ved: $f_0 = f_1 = 1$ og

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{for} \quad n = 2, 3, \ldots .$$

(1) Bevis, at der for alle $n \geq 1$ gælder: $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+1} = f_{n+1} \cdot f_{n-1}$.
(2) Bevis, at der for alle $n \geq 1$ gælder: $f_n^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (-1)^n$.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 3.

Lad A og B være vilkårlige mængder og betragt en afbildning $f : A \to B$. Afbildningen f giver anledning til en afbildning $F : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ defineret ved, at for en delmængde $C \subset B$,

$$F(C) = f^{-1}(C) = \{a \in A | f(a) \in C\}.$$

Vis, at f er injektiv hvis og kun hvis F er surjektiv.

OPGAVE 4.

På mængden $\mathbf{I}+$ betragtes "gå op i"-relationen $|$ defineret ved ($m, n \in \mathbf{I}+$)

$$m | n \iff \exists k \in \mathbf{I}+ : mk = n.$$

For $n \in \mathbf{I}+$ betegner D_n mængden af divisorer i n, dvs. tallene $m \in \mathbf{I}+$, så $m | n$.
(1) Vis, at $\langle D_n, | \rangle$ er en partielt ordnet mængde.
(2) Tegn Hassediagrammet for $\langle D_n, | \rangle$, for $n = 127$, $n = 255$ og $n = 256$.
(3) Undersøg, for hvilke $n \in \mathbf{I}+$ den partielt ordnede mængde $\langle D_n, | \rangle$ er totalt ordnet.

OPGAVE 5.

Lad $G = \langle S, \circ, ^{-}, 1 \rangle$ være en gruppe.
(1) Vis, at for $a, b \in S$ gælder: $\overline{a \circ b} = \overline{b} \circ \overline{a}$.
(2) Vis, at hvis inversafbildningen $^{-} : S \to S$ er en homomorfi af semigruppen $\langle S, \circ \rangle$ ind i sig selv, da er den binære operation $\circ$ kommutativ.
(3) Lad $G' = \langle S', \circ, ^{-}, 1 \rangle$ være en undergruppe af G. Vis, at relationen $\sim$ på S defineret ved ($x, y \in S$)

$$x \sim y \iff x \circ \overline{y} \in S',$$

er en ækvivalensrelation.

(Opgavesættet fortsætter)

OPGAVE 6.

Lad n og x være positive naturlige tal. Nedenstående procedurer A og B beregner den n'te potens af x, altså x^n (dette skal ikke vises).

```
procedure A(x,n);
begin
   pot ← 1;
   for i ← 1 step 1 until n do pot ← pot * x;
   return (pot);
end

procedure B(x,n);
begin
   t ← x;
   pot ← 1;
   while n > 0 do
   begin
      if (n mod 2) = 1 then pot ← pot * t;
      n ← n div 2;
      t ← t * t;
   end;
   return (pot);
end
```

(1) Angiv kompleksiteten af procedure A, som funktion af n, målt ved antallet af multiplikationer.
(2) Ved den binære fremstilling af et tal $n \in$ I+ skrives n som summen $n = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot 2^i$, hvor tallene b_i for $i = 0, 1, \ldots, m$ er enten 0 eller 1. Vis, at for et tal n af denne form, hvor $b_m = 1$, gælder

$$2^m \leq n < 2^{m+1}$$

(3) Angiv værste-tilfælde kompleksiteten af procedure B, som funktion af n, målt ved antallet af multiplikationer.