Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1964.

Matematik 3 (geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

3, I.

En 3 gange differentiabel kurve i planen er givet ved parameterfremstillingen $\overrightarrow{OP} = \bar{r}(t)$. Planen tænkes orienteret; det forudsættes, at krumningen $\kappa = \kappa(t) > 0$, og at $\kappa'(t) < 0$.

Idet t opfattes som tiden, skal man til et vilkårligt tidspunkt finde det øjeblikkelige drejningspunkt for den bevægelse, der udføres af kurvens ledsagende koordinatsystem TN, hvor T er kurvens tangent og N kurvens normal i punktet P.

Angiv endvidere den faste og den rullende polkurve.

3, II.

I planen er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XY.

1° Vis, at kurvesystemet givet ved ligningen

$$\frac{x^2}{u-1} + \frac{y^2}{u-2} = 1 ,$$

hvor u er en parameter, der gennemløber intervallet $2 < u < \infty$, netop består af alle ellipser med brændpunkterne (1,0) og (-1,0).

(fortsættes)

Hvilket kurvesystem bestemmes ved ligningen

$$\frac{x^2}{v-1} + \frac{y^2}{v-2} = 1 ,$$

hvor v er en parameter, der gennemløber intervallet $1 < v < 2$?

I det følgende betegnes ellipsen svarende til en parameterværdi $u > 2$ med k_u, medens systemkurven svarende til en parameterværdi v, $1 < v < 2$, betegnes l_v.

2° Gør rede for, at et vilkårligt punkt uden for koordinatakserne X og Y ligger på netop én ellipse k_u, $u > 2$, og på netop én systemkurve l_v, $1 < v < 2$. Vis omvendt, at for vilkårligt (u,v), $u > 2$, $1 < v < 2$, har k_u og l_v netop ét punkt fælles i 1. kvadrant, og udtryk dette punkts koordinater x og y ved u og v.

Idet man til hvert (u,v), $u > 2$, $1 < v < 2$, lader svare det punkt $P_{u,v}$ i 1. kvadrant, der er fælles for k_u og l_v, indføres u og v som krumlinede koordinater i 1. kvadrant af XY-planen.

3° Eftervis, at 1. kvadrant med u og v som krumlinede koordinater (parametre), $u > 2$, $1 < v < 2$, er fremstillet som en differentiabel flade. (Til de i 2° fundne udtryk $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ kan man tænke sig føjet $z = 0$.) Find koefficienterne E, F og G i første fundamentalform.

4° Gør rede for, at hver ellipse k_u, $u > 2$, skærer hver systemkurve l_v, $1 < v < 2$, under ret vinkel. Opskriv et udtryk for arealet af det område i 1. kvadrant, der afgrænses af kurverne k_{u_1}, k_{u_2}, l_{v_1} og l_{v_2}, hvor $2 < u_1 < u_2$ og $1 < v_1 < v_2 < 2$.