Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1963.

Matematik 3 (geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

3, I.

En flade er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ givet ved ligningen

$$z = k(1 - \cos x \cos y) + \sin x \sin y.$$

1) Vis, at koordinatsystemets begyndelsespunkt O ligger på fladen, og at XY-planen er tangentplan i dette punkt.

2) Bestem ligningen for fladens oskulerende paraboloide i punktet O. Udtryk for normalsnit gennem O krumningen i dette punkt ved vinklen φ fra X-aksen til normalsnittets tangent i O; (herved tænkes XY-planen orienteret, så $(X,Y) = + \frac{\pi}{2}$, medens krumningen regnes positiv, når krumningscentrum ligger på samme side af XY-planen som den positive del af Z-aksen, og negativ når krumningscentrum ligger på den modsatte side).

3) Find i punktet O fladens hovedkrumninger, og angiv de værdier af k, for hvilke fladen er henholdsvis elliptisk, parabolsk og hyperbolsk krummet i O. Bestem de værdier af k, for hvilke intet fladepunkt ligger på samme side af XY-planen som den negative del af Z-aksen.

4) Find krumningen i punktet O af fladens skæringskurve med planen

$$x + y + z\sqrt{6} = 0.$$

(fortsættes)

3, II.

En bevægelig plan drejer sig i en orienteret fast plan om et fast punkt O med konstant vinkelhastighed $\omega > 0$. En ret linie m i den bevægelige plan i afstanden $a > 0$ fra O, orienteret så O ligger på liniens positive side, gennemløbes af et punkt P med konstant relativ hastighed u. Hastigheden u regnes med fortegn i overensstemmelse med liniens orientering. Til tidspunktet $t = 0$ befinder P sig i det punkt A på m, der er nærmest O.

1) Find til det vilkårlige tidspunkt t de med fortegn regnede projektioner af P's absolutte hastighed og absolutte acceleration på linien m og på en positiv normal til m.

2) Vis, at hvis $u < -\omega a$ eller $u \geq -\frac{1}{2}\omega a$, så er P's banekurve konveks i hvert af sine punkter. Angiv, under hvilke(n) betingelse(r) vedrørende ω, a og u banekurven har en spids.

3) Bestem for $u = -\omega a$ evolutten til P's banekurve.