Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1962-63.

Matematik 3 (geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

3, I.

En flade er i et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ givet ved parameterfremstillingen

$$x = u^3 + 3uv, \quad y = u^2 + 2v, \quad z = u,$$

hvor hele UV-planen benyttes som parameterområde.

1) Vis, at fladen er differentiabel.

Angiv ved ligning en tangentplan til fladen parallel med planen

$$x + 3y + 3z = 0.$$

2) Opstil en ligning til bestemmelse af de talpar (u,v), hvor parameterkurverne gennem det tilsvarende punkt $P_{u,v}$ på fladen skærer hinanden under ret vinkel. Indtegn på en skitse af parameterplanen den algebraiske kurve, der dannes af de pågældende punkter (u,v).

Bestem endvidere parameterværdierne (u,v) for de punkter på fladen, hvor den ved differentialet bestemte lineære afbildning af parameterplanen på tangentplanen er en ligedannethed.

3) Opskriv en parameterfremstilling for fladens normal i det ved $(u,v) = (o,t)$ givne punkt S.

Vis, at fladenormalen i S beskriver en hyperbolsk paraboloide, når S gennemløber Y-aksen.

Idet t nu opfattes som tiden, og S betragtes som liggende på en linie, der glider langs Y-aksen, skal man finde drejningsvektoren $\bar{\omega}$ for bevægelsen af den stive figur, der dannes af denne linie og fladenormalen i S.

(fortsættes)

3, II.

En tre gange differentiabel rumkurve tænkes givet. Det forudsættes, at krumningen κ er forskellig fra 0 i hvert punkt. Idet en gennemløbsretning vælges, betegner vi med $\bar{t}$, $\bar{n}$ og $\bar{b}$ enhedsvektorerne på tangent, hovednormal og binormal.

1) Det antages her, at kurvens tangent stedse danner samme vinkel φ, $0 < \varphi < \pi$, med en fast retning givet ved enhedsvektoren $\bar{e}$.

Vis, at hovednormalen i hvert punkt er vinkelret på den faste retning.

Vis, at der gælder

$$\bar{e} = \bar{t} \cos \varphi \pm \bar{b} \sin \varphi,$$

hvor for alle kurvepunkter læses + eller for alle kurvepunkter −.

Idet τ betegner torsionen, skal det endelig vises, at

$$\frac{\tau}{\kappa} = \pm \cot \varphi.$$

2) Her antages omvendt, at $\frac{\tau}{\kappa}$ er konstant langs kurven.

Vis, at kurvens tangent stedse danner samme vinkel med en fast retning.