Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1962.

Matematik 3 (geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

En kurve er i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ givet ved

$$x = \operatorname{Arctg} s - \frac{s}{2}, \quad y = \frac{1}{2}\ln(1+s^2), \quad z = s\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad -\infty < s < \infty.$$

1) Vis, at den forelagte parameterfremstilling er naturlig.

2) Bestem kurvens krumning $\varkappa$ som funktion af s. Find længden af kurvens tangentbillede og beskriv kurvens retningskegle.

De følgende spørgsmål omhandler den flade, der beskrives af kurvens positive halvtangent i punktet A, idet A gennemløber kurven.

3) Opskriv en parameterfremstilling for fladen.

4) Påvis, at fladen kan udfoldes på et af de to områder i XY-planen, der afgrænses af kædelinien $y = \cosh x$.

5) Find længden af den korteste vej på fladen fra punktet $(1, 0, \sqrt{3})$ på kurvetangenten i $(0, 0, 0)$ til kurvepunktet svarende til $s = \sinh 2$. Hvor stor er den vinkel, hvorunder vejen skærer kurvetangenten svarende til $s = 1$?

II.

En 4 gange differentiabel rumkurve er givet ved naturlig parameterfremstilling $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(s)$. Det forudsættes, at krumningen $\varkappa$ og torsionen τ begge er forskellige fra 0 i hvert punkt. Enhedsvektorerne på tangent, hovednormal og binormal betegnes $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ og $\boldsymbol{b}$; differentiation med hensyn til buelængden angives ved et mærke $'$, f. eks. $\varkappa' = \dfrac{d\varkappa}{ds}$.

1) Udtryk den 1., 2. og 3. afledede af $\boldsymbol{r}^2$ med hensyn til s ved $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, $\varkappa$, $\varkappa'$ og τ. Vis derpå, at hvis kurven ligger på en kugleflade med centrum i O, så gælder

$$(*) \qquad \boldsymbol{r} = -\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n} + \frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b}.$$

(Hertil kan man skrive $\boldsymbol{r}$ på formen $\boldsymbol{r} = a_1\boldsymbol{t} + a_2\boldsymbol{n} + a_3\boldsymbol{b}$ og bestemme a_1, a_2 og a_3.) Vis videre, at man af (*) kan slutte

$$(**) \qquad \frac{\tau}{\varkappa} = \left(\frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)'.$$

Vil formlen (**) også gælde, hvis kurven ligger på en kugleflade med centrum i et fra O forskelligt punkt?

2) Vis, at af $\dfrac{\tau}{\varkappa} = \left(\dfrac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\right)'$ følger først

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n} + \frac{\varkappa'}{\varkappa^2\tau}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

hvor $\boldsymbol{c}$ er konstant, og videre, at kurven ligger på en kugleflade (med centrum i C, hvor $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$).