Skoleembedseksamen
under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1961—62.

Matematik 3.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

To punkter P og Q bevæger sig i rummet i et tidsinterval $b < t < c$. Idet O er et fast punkt, forudsættes $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}_1(t)$ og $\overrightarrow{OQ} = \boldsymbol{r}_2(t)$ differentiable.

1) Forklar, hvad der menes med strækningshastighed for liniestykket PQ. Vis, at strækningshastigheden eksisterer til ethvert tidspunkt, hvor P og Q ikke falder sammen.

2) Med $a = a(t)$ betegnes afstanden til Q fra det faste punkt A, hvori Q befinder sig til tidspunktet t'. Vis, at funktionen $a = a(t)$ er differentiabel fra højre og fra venstre side i t', og find udtryk for de to differentialkvotienter.

3) Det antages nu, at P og Q falder sammen til tidspunktet t''. Betragtes de to punkters bevægelse kun i tidsrummet $t'' \leqq t < c$, har det mening at tale om strækningshastighed for PQ i startøjeblikket t''. Find et udtryk for denne strækningshastighed. (Man kan f. eks. betragte punkternes bevægelse relativt til et passende bevægeligt rum.)

4) Ved en bevægelse i en plan ruller en parabel med parameter p på en ret linie. Parablens toppunkt T falder på et tidspunkt t^* på den rette linie; den bevægelige plans drejning (regnet med fortegn) i forhold til stillingen til tidspunktet t^* tænkes angivet ved en differentiabel funktion $\theta = \theta(t)$. — For røringspunktet R mellem parabel og ret linie ønskes den relative bevægelse udtrykt i koordinater i et passende koordinatsystem i den bevægelige plan. Bestem endvidere strækningshastigheden for TR til tidspunktet t^*, når dette opfattes som startøjeblik i et tidsrum $t^* \leqq t < d$.

II.

1) Om en differentiabel kurve i rummet forudsættes, at alle tangenter er parallelle. Vis, at kurven må være en ret linie eller et stykke af en ret linie. (Benyt naturlig parameterfremstilling for kurven.)

2) Om en 2 gange differentiabel kurve, hvis krumning ikke er 0 i noget punkt, forudsættes, at alle binormaler er parallelle. Vis, at alle kurvens punkter må ligge i samme plan. (Benyt, at $\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{a} = 0$, hvor $\boldsymbol{a}$ er en konstant vektor i binormalernes retning.)

3) Om en 3 gange differentiabel kurve, hvis krumning ikke er 0 i noget punkt, forudsættes, at torsionen er 0 i hvert punkt. Vis, at kurven må ligge i en plan.

4) Om en kurve, hvis krumning ikke er 0 i noget punkt, forudsættes, at alle oskulationsplaner går gennem et fast punkt O, som ikke ligger på nogen tangent. Vis, at kurven må ligge i en plan, idet De, alt efter hvad De får brug for ved beviset, antager kurven 2 eller 3 gange differentiabel. (Benyt O som udgangspunkt for stedvektorer.)