Skoleembedseksamen
under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1961.

Matematik 3.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XYZ er en kurve givet ved parameterfremstillingen

$$x = \sin t, \quad y = \sin t \cos t, \quad z = \cos^2 t; \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

1) Bestem kurvens oskulationsplan i det til $t = \frac{\pi}{2}$ svarende punkt, og find koordinaterne til krumningscentrum for kurven i samme punkt.

2) Vis, at kurven ligger på en kugleflade med centrum i $(0, 0, 0)$.

3) På en skitse af XZ-planen indtegnes den cirkel, hvori kuglefladen skæres af XZ-planen, det til $t = \frac{\pi}{2}$ svarende punkt på rumkurven, samt sporet af den fundne oskulationsplan. Indtegn derpå det fundne krumningscentrum, og gør rede for overensstemmelsen med Meusniers sætning om krumningscirkler for kurver på en flade.

4) Vis, at kurven er symmetrisk om XZ-planen. Giv derpå uden udregning af x''', y''' og z''' en kort begrundelse for, at kurvens torsion i det til $t = \frac{\pi}{2}$ svarende punkt ikke kan være forskellig fra 0.

II.

På en kugleflade vælges en storcirkel, »ækvator«. Denne forsynes med gennemløbsretning; herved bestemmes en orientering af ækvators plan; med N betegnes den af ækvators poler, som ligger på den positive side af ækvators plan. Endelig vælges på ækvator et punkt $Æ_0$.

Som parametre u og v for kuglefladen bruges poldistance og længde. Idet kuglens centrum kaldes O, bestemmes det til parameterværdier (u,v) svarende punkt $P = P_{u,v}$ da ved: [1]) $\angle NOP = u$, [2]) idet $Æ$ er det punkt på ækvator, hvor $\angle Æ_0 O Æ = v$, ligger P på meridianen gennem $Æ$, dvs. på den halve storcirkel fra N gennem $Æ$. Som parameterområde benyttes $0 < u < \pi$, $-\pi < v < \pi$. (Vi ser altså i det følgende bort fra polerne og en meridian).

Vend!

1) Et sædvanligt retvinklet højrekoordinatsystem XYZ indlægges, så O er begyndelsespunkt, medens N falder på den positive Z-akse, $Æ_0$ på den positive X-akse. Kuglens radius kaldes a.

Udtryk koordinaterne x, y og z for punkter på kuglefladen som funktioner af parametrene u og v.

Med $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ betegnes stedvektoren $\overrightarrow{OP}$ til punkter på kuglefladen.

Indtegn på en skitse vektorerne $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ og $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ svarende til et tilfældigt parameterpar (u,v); vektorerne afsættes fra det til (u,v) svarende punkt P på kuglefladen.

Find kuglefladens 1. fundamentalform.

2) Beskriv den flade f, som i koordinatsystemet XYZ fremstilles ved

$$x = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\cos v, \quad y = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}\sin v, \quad z = -\sqrt{3\operatorname{tg}\frac{u}{2}},$$

med $0 < u < \pi$, $-\pi < v < \pi$ som parameterområde. (Man kan f. eks. benytte sig af elimination af parametrene.)

Vis, at 1. fundamentalform er

$$ds^2 = \frac{\operatorname{tg}\frac{u}{2}}{\sin^2 u}du^2 + \operatorname{tg}\frac{u}{2}dv^2.$$

3) Kuglefladen afbildes på fladen f, idet hvert punkt på kuglefladen afbildes i det punkt på f, der svarer til samme parameterværdier.

Vis, at denne afbildning er vinkeltro.

Fladen f tænkes nu på sædvanlig måde udfoldet i en plan.

Beskriv det plane område ω, der herved fremkommer.

Sammen med hvert punkt P^k på kuglefladen betragtes nu det punkt P^ω, hvori det til P^k svarende punkt på fladen f falder ved udfoldningen. Idet jorden opfattes som en kugle, kan man tænke på P^k som et punkt på jordoverfladen, medens P^ω er det tilsvarende punkt på et vist geografisk kort.

Angiv arten af de kurver i ω, der svarer til parameterkurverne på kuglefladen.

Idet et skib i et vist tidsrum holder en fast kurs, dvs. vinklen mellem sejlretning og meridian er konstant, skal man bestemme arten af den kurve i ω, der svarer til skibets rute. (Benyt hertil sædvanlige polære koordinater i planen.)