Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1960—61.

Matematik 3 (ny og gammel ordning).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgave nr. 1. 61

Lad $\overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}(u, v)$ være parameterfremstillingen for en differentiabel flade, der er defineret i et parameterområde ω. Det er givet, at parameterkurverne skærer hinanden ortogonalt. Lad

overflødigt

$$\begin{aligned} u &= \varphi(t) \\ v &= \psi(t) \end{aligned} \qquad \alpha < t < \beta$$

være parameterfremstillingen for en differentiabel kurve k i parameterområdet ω, og lad $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (u_0, v_0)$ være et indre punkt i ω. Vis, at såfremt den til kurven k svarende differentiable kurve på fladen halverer vinklen mellem parameterkurverne i det til (u_0, v_0) svarende fladepunkt, gælder

$$\left[\boldsymbol{r}'_u(u_0, v_0)\,\varphi'(t_0)\right]^2 - \left[\boldsymbol{r}'_v(u_0, v_0)\,\psi'(t_0)\right]^2 = 0\,.$$

Opgave nr. 2. 61

I matricen

$$\boldsymbol{M}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) & g_1(t) & h_1(t) \\ f_2(t) & g_2(t) & h_2(t) \\ f_3(t) & g_3(t) & h_3(t) \end{Bmatrix}$$

er de enkelte elementer differentiable funktioner af t.

Den matrix

$$\begin{Bmatrix} f'_1(t) & g'_1(t) & h'_1(t) \\ f'_2(t) & g'_2(t) & h'_2(t) \\ f'_3(t) & g'_3(t) & h'_3(t) \end{Bmatrix},$$

der er fremkommet af $\boldsymbol{M}(t)$ ved differentiation af hvert af dennes elementer, betegnes ved $\boldsymbol{M}'(t)$. Idet det antages, at matricen $\boldsymbol{M}(t)$ er ortogonal for enhver værdi af t, skal man vise, at matricen $\boldsymbol{M}'(t) \cdot [\boldsymbol{M}(t)]^{-1}$ er skævsymmetrisk. (En matrix $\boldsymbol{A}$ kaldes skævsymmetrisk, såfremt $a_{ij} = -a_{ji}$ for $i \neq j$ og $a_{ij} = 0$ for $i = j$.)

Vend!

Opgave nr. 3. 61

Lad $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet. Lad

$$\begin{aligned} x &= \cos 2t \\ y &= \sin 2t \qquad\qquad -\infty < t < \infty \\ z &= \quad t \end{aligned}$$

være parameterfremstillingen for en rumkurve.

1) Find tangentvektoren $\boldsymbol{t}$, hovednormalvektoren $\boldsymbol{n}$ og binormalvektoren $\boldsymbol{b}$ i det til parameterværdien t svarende kurvepunkt Q. Lad $\boldsymbol{M}$ betegne den matrix, hvis søjlevektorer er $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ og $\boldsymbol{b}$. Idet matricen $\boldsymbol{M}'$ defineres som i opgave 2, skal man udregne produktet $\boldsymbol{M}'\boldsymbol{M}^{-1}$.

I det følgende opfattes ovennævnte parameter t som tiden. Lad $(O_1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1)$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, der udfører en bevægelse i forhold til det faste koordinatsystem $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ bestemt ved, at O_1's koordinater til tiden t er (t, t^2, t^3), medens enhver af grundvektorerne $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1$ og $\boldsymbol{k}_1$ til ethvert tidspunkt t er parallel med henholdsvis $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$ og $\boldsymbol{b}$ (der jo allerede er fundet i spørgsmål 1)).

2) Idet P er et punkt, der tænkes fast knyttet til koordinatsystemet $(O_1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1)$, og som i dette system har de faste koordinater (x_1, y_1, z_1), skal man angive koordinaterne til P's hastighed i det faste koordinatsystem $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

3) Til det vilkårlige tidspunkt t skal man finde den i bevægelsen indeholdte drejningsvektor ω samt den til bevægelsen hørende reducerede skruehøjde.

4) Til det vilkårlige tidspunkt t skal man finde den øjeblikkelige skruningsakse. Angiv den flade, som den øjeblikkelige skruningsakse beskriver.