Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1960.

Matematik 3 (ny og gammel ordning).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgave nr. 1 61

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ er P og A punkter på enhedscirklen

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \cos u \\ y &= \sin u \end{aligned} \qquad 0 \leqq u < 2\pi$$

svarende til henholdsvis en vilkårlig parameterværdi u samt parameterværdien $u = 0$. På den ved (1) orienterede cirkeltangent i P afsættes et liniestykke $PQ = -u$.

1) Angiv ved hjælp af parameteren u en parameterfremstilling for den kurve C_1, som Q beskriver, når u gennemløber intervallet $0 \leqq u < 2\pi$.

2) Angiv ved hjælp af parameteren u en parameterfremstilling for en vilkårlig afvikler til C_1, idet afviklingen begynder i A. I det følgende betegner C_2 den blandt disse afviklere, der går gennem punktet (0,0). Vis, at buelængden s på kurven C_2 regnet ud fra punktet (0,0) er bestemt ved

$$s = u + \frac{1}{6} u^3 .$$

Angiv en parameterfremstilling for C_2.

3) I det følgende betegner $(O_1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1)$ et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, der bevæger sig i forhold til det faste koordinatsystem $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$. Bevægelsen fastlægges ved, (1) at parameteren u nu opfattes som tiden, altså $u = t$, (2) at

$$\boldsymbol{i}_1 = (\cos 2u, \sin 2u),$$

samt (3) at O_1 gennemløber C_2 på den ved dennes parameterfremstilling fastlagte måde. Angiv hastigheden for det punkt, som i koordinatsystemet $(O_1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1)$ har de faste koordinater (x_1, y_1).

4) Angiv en parameterfremstilling for bevægelsens polkurver. (Parameterfremstillingen for den faste polkurve F angives på sædvanlig måde i koordinatsystemet $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, medens parameterfremstillingen for den rullende polkurve R angives i koordinatsystemet $(O_1, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1)$.)

Vend!

Opgave nr. 2 61

Lad $z = f(x, y)$ være ligningen for en to gange differentiabel flade, der går gennem $(0, 0, 0)$, og som i dette punkt har xy-planen som tangentplan.

1) Angiv ved hjælp af Taylors formel ligningen for fladens oskulerende paraboloide i punktet $(0, 0, 0)$.

2) En plan, der står vinkelret på fladen i $(0, 0, 0)$, og hvis spor i xy-planen er linien

$$x = \xi \cos \theta \qquad -\infty < \xi < \infty$$

$$y = \xi \sin \theta, \qquad \theta \text{ fast}$$

skærer fladen og paraboloiden i normalsnit. Gør rede for, at disse normalsnit har samme krumning i $(0, 0, 0)$.

3) Fladen skæres med n normalplaner ($n \geqq 2$, n hel), hvis spor i xy-planen er linierne

$$x = \xi \cos\left(\frac{\pi}{n} p\right) \qquad -\infty < \xi < \infty$$

$$y = \xi \sin\left(\frac{\pi}{n} p\right) \qquad p = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

Find krumningen H_p i $(0, 0, 0)$ af et vilkårligt af disse normalsnit, og beregn derpå

$$\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} H_p .$$

Det oplyses, at

$$\sum_{p=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{\pi}{n} p\right) = \sum_{p=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{\pi}{n} p\right) = \frac{n}{2}$$

og

$$\sum_{p=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{n} p\right) \sin\left(\frac{\pi}{n} p\right) = 0 .$$

For disse oplysninger kræves intet bevis.