Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1959.

Matematik 3.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I. *ikke særlig interessant, plan opgave*

Der er givet en kugle og en ret linie l, som skærer den, men ikke går gennem dens centrum O. Vis, at de planer, hvis skæringscirkler med kuglen har deres centrer beliggende på l, er tangentplaner til en parabolsk cylinder, og bestem den del af cylinderfladen, der udgøres af disse planers røringsfrembringere.

II.

For en 3 gange differentiabel rumkurve k med den naturlige parameterfremstilling $\boldsymbol{r}(s)$, hvor s gennemløber et åbent interval, gælder som bekendt Frenets formler:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} &= \qquad\quad \varkappa\boldsymbol{n} \\ \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} &= -\varkappa\boldsymbol{t} \qquad + \tau\boldsymbol{b} \\ \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} &= \qquad\; -\tau\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

hvor $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, $\varkappa$ og τ betegner henholdsvis kurvens tangentvektor, hovednormalvektor, binormalvektor, krumning og torsion.

Om kurven k forudsættes, at dens krumning $\varkappa$ er en positiv konstant, og at dens torsion τ er positiv. Det geometriske sted k_1 for kurvens krumningscentrer har parameterfremstillingen $\boldsymbol{r}_1(s) = \boldsymbol{r}(s) + \dfrac{1}{\varkappa}\boldsymbol{n}(s)$.

Vis, at kurven k er det geometriske sted for krumningscentrerne for kurven k_1, og at de to kurvers torsioner i punkter svarende til samme værdi af s har et af s uafhængigt produkt.

III a. (Ny ordning.) *61*

Et urs to visere OA og OB antages at have samme længde c. Tiden t tænkes målt ved den vinkel, som timeviseren OA har drejet sig ud fra en fast valgt stilling, i hvilken de to visere falder sammen.

Udled en parameterfremstilling for den kurve, som linien AB (hvorunder skal forstås linien vinkelret på $OA = OB$ gennem $A = B$, når viserne falder sammen) indhyller under visernes bevægelse. (Find og benyt f. eks. vinklen, som den gennem O gående normal til AB til tiden t danner med visernes udgangsstilling.)

Vis, at indhyllingskurven rører linien AB i det punkt, der deler liniestykket AB indvendigt i forholdet $1:12$, og at den er en epicykloide, der fremkommer ved rulning af en cirkel med radius $\dfrac{c}{13}$ på en cirkel med radius $\dfrac{11c}{13}$.

Vend!

III b. (Gammel ordning.)

En homogen plade med massen M har form som en ligebenet retvinklet trekant med hypotenusen c. Pladen kan dreje sig gnidningsfrit om en fast lodret akse, på hvilken den ene katete ligger, således at den rette vinkels spids er øverst. En partikel med massen m er bundet til hypotenusen og kan bevæge sig gnidningsfrit langs denne. Til et vist tidspunkt befinder partiklen sig i hvile relativ til pladen i hypotenusens øverste punkt, og pladen drejer sig med vinkelhastigheden ω_0. Derefter overlades systemet til tyngdens påvirkning.

Angiv den betingelse, som de givne størrelser må opfylde, når partiklen skal begynde en nedadgående bevægelse.

Find under antagelse af, at denne betingelse er opfyldt, pladens vinkelhastighed og partiklens fart relativ til pladen, begge som funktioner af partiklens afstand fra hypotenusens øverste punkt. Angiv den betingelse, som de givne størrelser må opfylde, når partiklen skal nå hypotenusens nederste punkt.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.