Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1958/59.

Matematik 3 (Geometri og rationel mekanik).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Sædvanlige retvinklede koordinater i planen. En cirkel med radius 1 ruller uden at glide på X-aksen med konstant vinkelhastighed 1. Med T betegnes tangenten til den rullende cirkel i et punkt R af denne. Punktet R tænkes fast knyttet til cirkelen, og til tiden $t = 0$ falder R i $(0,2)$. Indhyllingskurven for systemet af samtlige stillinger af T betegnes med k.

1) Gør rede for, at karakteristikpunktet S er projektionen på T af det punkt, hvori X-aksen rører den rullende cirkel.

2) Udled en parameterfremstilling for k, idet koordinaterne til S bestemmes som funktioner af tiden t.

3) Vis, at k består af differentiable kurvestykker, der støder sammen i spidser. Bestem spidserne samt retningerne af de positive halvtangenter i disse, og tegn en skitse af k.

4) Vis, at k er en afvikler af en cykloide, og bestem dennes spidser.

II.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet med begyndelsespunkt O er en flade F givet ved en ligning

$$z = f\,(x, y).$$

Parameterpunktet $Q : (x, y)$ gennemløber et åbent område ω i XY-planen. Den givne funktion $f\,(x, y)$ antages at have kontinuerte partielle afledede af anden orden i ω, og det forudsættes, at

$$f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2 > 0$$

overalt i ω. Med $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}\,(x, y)$ betegnes enhedsvektoren på normalen til F i det til $Q : (x, y)$ svarende punkt af F, således orienteret, at vinkelen mellem normalen og Z-aksen er spids. Den ved parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{ON} = \boldsymbol{n}\,(x, y)$$

bestemte flade Φ med parameterområdet ω kaldes normalbilledet af den givne flade.

Vend!

1) Udled formelen

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial y} = \frac{f''_{x^2} \cdot f''_{y^2} - (f''_{xy})^2}{\left(1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \boldsymbol{n},$$

og gør rede for, at Φ er en differentiabel flade.

2) Med ω^* betegnes et vilkårligt begrænset, lukket område, som er indeholdt i ω, og som har et areal. Udtryk fladearealerne $F(\omega^*)$ og $\Phi(\omega^*)$ af de til ω^* svarende dele af fladerne F og Φ ved hjælp af planintegraler udstrakt over ω^*.

3) Lad $Q_0 : (x_0, y_0)$ være et vilkårligt opgivet punkt af ω, og lad $\omega_1^*, \omega_2^*, \cdots, \omega_n^*, \cdots$ betegne en følge af delområder af den i spørgsmål 2) omtalte art. Idet det antages, at den største afstand mellem Q_0 og noget punkt af ω_n^* konvergerer mod nul for $n \to \infty$, skal man vise, at forholdet

$$\frac{\Phi(\omega_n^*)}{F(\omega_n^*)}$$

har en grænseværdi for $n \to \infty$, og bestemme denne.

4) Vis, at den fundne grænseværdi er lig med det Gauss'ske krumningsmål (altså produktet af hovedkrumningerne) for fladen F i det til Q_0 svarende punkt af F. (Betragt f. eks. først det specielle tilfælde, hvor $x_0 = y_0 = f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$, og gør derpå kort rede for, at påstanden ligeledes gælder i det almindelige tilfælde.)

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.