

Skoleembedseksamen

ved det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1957/58.

Geometri og rationel mekanik.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet.

Lad

$$x = f(s),$$

$$y = g(s)$$

være en naturlig parameterfremstilling for en tre gange differentiabel kurve i XY -planen.

Vis, at:

$$f'(s) \cdot f''(s) + g'(s) \cdot g''(s) = 0,$$

$$f''(s) = -g'(s) \cdot k(s),$$

$$g''(s) = f'(s) \cdot k(s),$$

$$f'(s) \cdot f'''(s) + g'(s) \cdot g'''(s) = -(k(s))^2,$$

hvor $k(s)$ betegner kurvens krumning.

Vi antager nu yderligere, at $k(s) \neq 0$, og betragter en rumkurve med parameterfremstillingen:

$$x = f(s),$$

$$y = g(s),$$

$$z = s \cdot \operatorname{tg} v,$$

hvor v er en given konstant $\left(-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}\right)$; rumkurvens projektion på XY -planen er altså den oven for givne plane kurve.

Find enhedsvektorerne $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ og $\mathbf{n}(s)$ på henholdsvis rumkurvens tangent, binormal og hovednormal udtrykt ved $f'(s)$, $g'(s)$, v og fortegnet for $k(s)$. Vis, at de tre vektorer danner konstante vinkler med z -aksen, og anfør disse vinkler.

Find rumkurvens buelængde $\sigma(s)$ (regnet fra det punkt, som svarer til $s = 0$) udtrykt ved v og s samt dens krumning $\kappa(s)$ og torsion $\tau(s)$ udtrykt ved v og $k(s)$.

II.

En tynd homogen stang AB med længden $2a$ og massen M har sit nederste endepunkt A bundet til en glat vandret linie h og går gnidningsfrit gennem et lille øje H lodret over h i højden a over denne linie. Til stangens øverste endepunkt B er fastgjort en partikkel med massen m . Stangens spidse vinkel med h kaldes θ . Stang og partikkel er påvirket af tyngdekraften.

Stangen med partikkel holdes i likevekt for $\theta = \frac{\pi}{3}$ ved hjelp av en vandret snor, som er strammet ut mellom A og projektionen H_1 av H på h . Find snorkraften samt de reaksjoner, hvormed H og h påvirker stangen.

Derefter klippes snoren over, og bevegelsen af stangen (med partikkel) betragtes for $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

Find det øjeblikkelige drejningspunkt O , og find afstandene fra O til henholdsvis B og stangens midtpunkt C som funktioner af θ .

Find den kinetiske energi af stangen med partikkel som funktion af θ .

Find $\dot{\theta}$ som funktion af θ .

Find $\ddot{\theta}$ for $\theta = \frac{\pi}{3}$ i det specielle tilfælde, hvor $m = 0$.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.