Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1957.

Geometri og rationel mekanik.

I.

For en plan kurve med buelængde s og krumningsradius ϱ gælder ligningen

$$s^2 + 4\,\varrho^2 = 36\,a^2,$$

hvor a er en positiv konstant. Find kurvens naturlige ligning $s = f(\theta)$, idet buelængden s og tangentdrejningen θ regnes ud fra samme punkt A på kurven.

Vis, at kurven er en epicykloide.

Et sædvanligt retvinklet koordinatsystem XY anbringes således, at krumningscentret C svarende til punktet A får koordinatsættet $(0, a)$, og at $\overrightarrow{CA}$ får Y-aksens retning. Find en parameterfremstilling for kurven i dette koordinatsystem, idet θ (regnet med fortegn) benyttes som parameter. Vis, at dersom P er et vilkårligt punkt på kurven og Q det punkt, man får ved at parallelforskyde P i X-aksens retning et stykke, der er lig buelængden fra A til P (regnet med fortegn), vil Q gennemløbe en asteroide, når P gennemløber epicykloiden.

II.

En tynd homogen stang med længden $2\,l$ og massen m støtter sig med sit nederste endepunkt A til en glat vandret linie og med sit øverste endepunkt B til en glat lodret linie, som skærer den vandrette linie. Den spidse vinkel med den lodrette retning betegnes med φ. Stangen antages at være i hvile for $\varphi = \varphi_0$ $(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2})$ og overlades derefter til tyngdens påvirkning.

Find $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ og de på stangen virkende reaktioner som funktioner af φ. Vis, at stangen slipper den lodrette linie for en vis værdi φ_m af φ, og at den indtil da ikke slipper den vandrette linie; bestem $\cos\varphi_m$ samt stangens kinetiske energi for $\varphi = \varphi_m$.

Herefter antages udgangsstillingen at have svaret til $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$.

Efter at have sluppet den lodrette linie fortsætter stangen uforstyrret sin bevægelse under tyngdens påvirkning. Find for $\varphi_m < \varphi < \frac{\pi}{2}$ den vandrette projektion af tyngdepunktets hastighed samt $\dot{\varphi}$ og $\ddot{\varphi}$ som funktioner af φ og vis, at stangen stadig ikke slipper den vandrette linie.