Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1956—57.

Matematik 3 (geometri og rationel mekanik).

I.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet er en flade F givet ved parameterfremstillingen

$$x = \sin u \cos v \qquad 0 < u < \frac{\pi}{2}$$
$$y = \sin u \sin v \qquad -\infty < v < \infty$$
$$z = \cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \varphi(v),$$

hvor $\varphi(v)$ er en vilkårlig ofte differentiabel funktion af v, og $\varphi(0) = 0$.

1) Vis, at F er en differentiabel flade.

2) Vis, at parameterkurven k svarende til $v = v_0$, hvor v_0 er en vilkårlig konstant, ligger i en plan q, der indeholder z-aksen.

3) Tegn en skitse af parameterkurven svarende til $v = 0$. Man skal bestemme kurvens asymptote samt undersøge, hvordan kurven forløber, når u nærmer sig til $\frac{\pi}{2}$; og endelig skal man vise, at $z < 0$ for $0 < u < \frac{\pi}{2}$.

4) Vis, at parameterkurverne svarende til $v = 0$ og $v = v_0$, hvor v_0 er en vilkårlig konstant, er indbyrdes kongruente.

5) Idet P er et vilkårligt punkt på den kurve k, der omtaltes i spørgsmål 2), og p er tangentplanen til fladen F i punktet P, skal man vise, at vinkelen mellem planerne p og q er uafhængig af beliggenheden af punktet P på k.

6) For en fastholdt værdi u_0 i det åbne interval $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ betragtes i uv-planen punkterne Q_1 og Q_2 med koordinaterne $(u_0, 0)$ og $(u_0, 2\pi)$. Bestem $\varphi(v)$ i intervallet $0 \leqq v \leqq 2\pi$ således, at den bue på fladen F, der svarer til liniestykket Q_1Q_2, får den mindst mulige længde. Angiv den nævnte bues art i dette minimumstilfælde.

vend!

II.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen er en kurve k givet ved parameterfremstillingen

$$x = \frac{1}{2} u^2 \qquad\qquad 0 \leqq u < \infty$$
$$y = -\frac{1}{3} u^3;$$

y-aksen er lodret og positiv opad. En tung partikel med massen m bevæger sig under tyngdens påvirkning nedad på kurven, der antages at være glat. Til tiden $t = 0$ befinder partiklen sig i et punkt P_0 med koordinaterne $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, og dens fart v_0 er lig den fart en partikel (med begyndelseshastighed 0) opnår ved et frit fald under tyngdens påvirkning et stykke lig $-y_0$.

1) Find, som funktion af u, det tryk, som kurven udøver på partiklen i en vilkårlig stilling af denne, og vis, at når partiklen er ensidigt bundet til kurvens yderside, vil partiklen under hele bevægelsen forblive på kurven.

2) Vi betragter nu en opadgående bevægelse af partiklen på kurven k. Til tiden $t = 0$ befinder partiklen sig i P_0 og har farten v_0, hvor P_0 og v_0 har samme betydning som ovenfor. Idet punktet $(0, 0)$ kaldes A, skal man vise (f. eks. ved en passende vurdering af et integral), at buen P_0A gennemløbes i en endelig tid.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.