

# Skoleembedseksamen

## under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1956.

### Matematik 3 (geometri og rationel mekanik).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

#### I.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen drejer en linie  $l$  sig med vinkelhastigheden  $+1$  om begyndelsespunktet  $O$ . En anden linie  $m$  udfører samtidig en translatorisk bevægelse i  $xy$ -planen således, at dens skæringspunkt med  $y$ -aksen bevæger sig med den konstante hastighed  $\frac{2a}{\pi}$  i  $y$ -aksens positive retning. Til tidspunktet  $t = 0$  befinder både  $l$  og  $m$  sig på  $x$ -aksen. Den kurve, som skæringspunktet  $P$  mellem  $l$  og  $m$  gennemløber i tidsintervallet  $0 < t < \pi$ , kaldes  $k$ .

Idet de hastigheder,  $P$  får, hvis det tænkes fast knyttet til henholdsvis  $l$  og  $m$ , anses for kendte, skal man konstruere tangenten til  $k$  i det punkt, der svarer til  $t = \frac{\pi}{3}$ .

Find en parameterfremstilling for  $k$ , og find det punkt  $P_0$ , hvortil  $P$  nærmer sig, når  $t \rightarrow 0$ . I det følgende vil vi regne punktet  $P_0$  med til kurven  $k$ . Vis, at  $k$  har en tangent i  $P_0$ , og bestem denne.

Vis, at  $k$  har en asymptote, og find dennes ligning. Undersøg, f. eks. ved anvendelse af polære koordinater, om asymptoten sammen med  $y$ -aksen og kurven begrænser et endeligt areal.

Idet  $z$ -aksen er vinkelret på  $xy$ -planen, skal man vise, at planen  $\frac{\pi}{2} hy - az = 0$  skærer vindelfladen

$$\begin{aligned}x &= a v \cos u & 0 \leq u \leq \pi \\y &= a v \sin u & -\infty < v < \infty \\z &= h u\end{aligned}$$

i en ret linie samt en kurve  $k_1$ , der ved retvinklet projektion på  $xy$ -planen går over i kurven  $k$ .

Gør kort rede for, f. eks. ved henvisning til et resultat fra lærebogen, at der findes en centrkraft  $K$  rettet mod  $O$ , under hvis påvirkning en partikel med massen  $m$  vil gennemløbe  $k$  således, at radiusvektor til partiklen har vinkelhastigheden 1, når  $P$  starter i  $P_0$ . Bestem vinkelhastigheden for radiusvektor til partiklen samt partiklens fart, når denne befinder sig på  $y$ -aksen.

## II.

En partikel med massen  $m$  bevæger sig under tyngdens påvirkning på skruelinien

$$x = a \cos \theta$$

$$y = a \sin \theta$$

$$z = a \theta \operatorname{tg} \alpha$$

hvor  $-\infty < \theta < \infty$  og  $a$  og  $\alpha$  er konstanter;  $z$ -aksen er lodret, og skruelinien tænkes glat. Til tidspunktet  $t = 0$  befinder partiklen sig i hvile i et vilkårligt punkt  $A$  af skruelinien. Bestem partiklens tangentialakceleration til et vilkårligt tidspunkt  $t$ .

Når partiklen har gennemløbet een vinding af skruelinien og altså befinder sig i et punkt  $A_1$ , der ligger lodret under  $A$ , starter en anden partikel med massen  $m_1$  og begynder sin bevægelse under tyngdens påvirkning på skruelinien ud fra punktet  $A$ . Bestem alle følgende tidspunkter, hvor den ene partikel ligger lodret under den anden.

---

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.