Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1954—55.

Geometri og rationel mekanik.

I.

En traktricehalvdel K er givet ved sin naturlige ligning

$$s = -a \ln \cos \theta, \qquad 0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2},$$

hvor a er en positiv konstant. Det anses for bekendt, at K har en asymptote, og at det for enhver tangent til K gælder, at stykket fra tangentens røringspunkt til dens skæringspunkt med asymptoten er lig a.

K tænkes beliggende i en lodret plan således, at K's positive halvtangent T_0 for $\theta = 0$ er rettet lodret nedad. To partikler A og B, hver med massen $\frac{m}{2}$, er forbundet med en tynd vægtløs stang af længden $2a$. Partiklen A kan gnidningsfrit bevæge sig på K's asymptote, og stangen kan bevæge sig gnidningsfrit som tangent til K. Idet θ betegner vinklen fra T_0 til stangen, skal man finde $\dot{\theta}$ som funktion af θ ved en bevægelse under tyngdens påvirkning, for hvilken $\dot{\theta} > 0$ og $\dot{\theta} \to 0$ for $\theta \to 0$, samt angive asymptotens og kurvens reaktioner som funktioner af θ.

II.

Sædvanlige retvinklede koordinater i rummet. Der er givet den ligesidede hyperbelgren H med parameterfremstillingen

$$P_t = (1, \sinh t, \cosh t), \qquad -\infty < t < \infty,$$

og halvcirklen C med parameterfremstillingen

$$Q_u = (\cos u, \sin u, 0), \qquad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}.$$

Punkterne P_t og Q_u antages i det følgende at variere på en sådan måde, at linien P_tQ_u stadig er normal til C.

Bestem P_t's koordinater som funktioner af u.

Når u gennemløber intervallet $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, beskriver linien $l_u = P_tQ_u$ en flade F.

Find parameterfremstillingen for F, når man som den ene parameter tager u for den linie l_u, hvorpå det løbende punkt ligger, og som den anden parameter v tager punktets z-koordinat.

Vis, at F er en differentiabel flade, og find det geometriske sted for de fladepunkter, hvori fladenormalen er parallel med XY-planen.

Vis, at planen $z = -1$ skærer F i en cirkel, hvorfra et punkt er fjernet.