

S K O L E E M B E D S E K S A M E N

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1953.

Geometri og rationel mekanik.
Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

En tynd homogen stang AB med massen m og længden $2a$ falder under tyngdens påvirkning i en lodret plan π . I udgangstidspunktet $t=0$ er stangens midtpunkt M i hvile, stangen er lodret med punktet A nederst, og den roterer med en vinkelhastighed ω omkring en akse vinkelret på π .

1) Find ω udtrykt ved a , når hodografen for punktet A skal være en cykloide. Find stangens kinetiske energi til det første tidspunkt efter $t=0$, som svarer til en spids af cykloiden.

2) Vis, at den faste polkurve for stangens bevægelse i π er en parabel, og find den bevægelige polkurve.

3) Samtidig med at stangen falder, bevæger et masseløst punkt P sig med jævn hastighed v på stangen; for $t=0$ falder P i M . Idet denne bevægelse opfattes som relativ bevægelse, og stangens bevægelse som medføringsbevægelse, skal man udtrykt ved t angive størrelsen af de lodrette og vandrette komponenter af punktets relative hastighed, medføringshastighed og absolutte hastighed, samt af dets relative akceleration, medføringsakceleration og absolutte akceleration til et tidspunkt $t=0$, hvor stangen er vandret.

II.

Sædvanlige retvinklede koordinater.

La K betegne asteroidebuen med parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cos^3 u & 0 & \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ y &= a \cdot \sin^3 u \end{aligned}$$

Afstanden fra koordinatsystemets begyndelsepunkt til et variabelt punkt af K betegnes r .

1) Udregn den naturlige ligning for K fra punktet $u=0$. Idet buelængden fra midtpunktet M af K til et variabelt punkt af K betegnes s_1 , skal man bevise, at

$$16s_1^2 = 12r^2 + 3a^2.$$

En partikel med massen m er bundet til buen; partikelen er påvirket af en tiltrækningskraft af størrelsen cr (hvor c er en konstant) rettet mod koordinatsystemets begyndelsepunkt.

2) Idet K forudsættes glat, skal man angive en differentialligning til bestemmelse af s_1 som funktion af tiden. Vis, at såfremt partiklens fart v_M i M er mindre end en vis konstant v_0 , vil partiklen foretage svingninger omkring M med en svingningstid, som er uafhængig af v_M , og bestem svingningstiden. Find kurvens tryk på partiklen som funktion af u og v_M .