Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1963-64.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

2, I.

Lad

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

være en følge af funktioner, der hver for sig er kontinuerte i intervallet $0 \leq x \leq 1$, og som konvergerer ligeligt mod grænsefunktionen $f(x)$. Undersøg om

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \qquad \text{for } n \to \infty.$$

2, II.

Vis, at såfremt

(1) rækken $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ er konvergent

(2) $u_n > 0$ for $n = 1,2,\ldots$

(3) $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$

findes der et positivt helt tal N, så at

$$u_n < \frac{1}{n} \text{ for alle } n \geq N.$$

(fortsættes)

2, III.

Opskriv den til funktionen $y = \ln(1+x)$ hørende Maclaurinske række.

1) Ved at benytte Lagranges udtryk for restleddet $R_n(x)$ skal man gøre rede for, at

$$R_n(1) \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

2) Gør rede for, at når det vides, at for ethvert x i intervallet $0 < x < 1$ gælder, at

$$R_n(x) \to 0 \text{ for } n \to \infty,$$

kan man af Abels sætning slutte, at

$$R_n(1) \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

3) Idet det forudsættes kendt, at Cauchy's udtryk for restleddet er

$$R_n(x) = \frac{(1-\Theta)^{n-1}}{(n-1)!} x^n f^{(n)}(\Theta x),$$

hvor $0 < \Theta < 1$, fås i det foreliggende tilfælde, at

$$0 < R_n(1) = \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1+\Theta} < \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta}\right)^{n-1}.$$

Hvad er der nu galt ved det følgende ræsonnement.

Idet brøken $\frac{1-\Theta}{1+\Theta}$ er en positiv ægte brøk og idet en sådan opløftet til (n-1)te potens går mod 0 for $n \to \infty$ vil $R_n(1) \to 0$ for $n \to \infty$.

2, IV.

En ellipse med centrum O er givet ved to konjugerede halvdiametre OA og OB, som ikke er indbyrdes vinkelrette.

1° Konstruer et om ellipsen omskrevet rektangel med en side parallel med OA.

2° (Ny figur!) Konstruer en i ellipsen indskrevet rhombe (parallelogram med alle sider lige lange), hvis sider er parallelle med OA og OB.