Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1963.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

2, I.

1) Idet

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n \sin \frac{x}{n}}{x+x^3}, & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

skal man vise, at funktionsfølgen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots \tag{1}$$

er konvergent i intervallet $-\infty < x < \infty$.

Bestem grænsefunktionen $f(x)$.

2) Gør rede for, at funktionen

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

er monoton i intervallet $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$. Ved bl.a. at anvende dette resultat på passende måde skal man dernæst besvare følgende spørgsmål.

3) Undersøg, om følgen (1) konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i intervallet $0 \leqq x \leqq 1$.

(fortsættes)

(fortsat)

4) Idet

$$a_n = \int_0^1 f_n(x)dx,$$

skal man undersøge, om talfølgen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

er konvergent, og i bekræftende fald skal man bestemme dens grænseværdi.

5) Idet

$$g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \qquad 0 \leqq x \leqq 1$$

skal man undersøge, om funktionsfølgen

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots \tag{2}$$

er konvergent i intervallet $0 \leqq x \leqq 1$, og i bekræftende fald skal man bestemme grænsefunktionen $g(x)$, samt undersøge, om funktionsfølgen (2) konvergerer ligeligt mod $g(x)$ i intervallet $0 \leqq x \leqq 1$.

6) Endelig skal man undersøge, om funktionsfølgen (1) konvergerer ligeligt mod $f(x)$ i intervallet $0 \leqq x < \infty$.

(fortsættes)

Forprøven. Sommeren 1963.

2, II.

Som bekendt gælder det, at tangenterne i endepunkterne af en korde i en ellipse skærer hinanden på den gennem kordens midtpunkt gående diameter (eller er parallelle).

1) Vis, at hvis de to tangentstykker fra et punkt uden for en ellipse er lige lange, så ligger punktet på en af akserne.

2) Vis, at der for en vilkårlig trekant findes en og kun en ellipse (eller cirkel), der går gennem midtpunkterne af trekantens sider og i hvert af disse punkter rører den pågældende trekantside.

2, III.

1) Om en lineær vektorfunktion $\overline{V}' = f(\overline{V})$ i planen forudsættes, at der for hver vektor $\overline{V}$ i planen gælder $\overline{V} \cdot f(\overline{V}) = 0$. Udtryk vektorfunktionen i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen, og giv en geometrisk beskrivelse af den ved vektorfunktionen bestemte lineære afbildning, idet alle vektorer afsættes fra samme punkt O.

2) Om en lineær vektorfunktion $\overline{V}' = g(\overline{V})$ i rummet forudsættes, at der for hver vektor $\overline{V}$ i rummet gælder $\overline{V} \cdot g(\overline{V}) = 0$. Udtryk vektorfunktionen i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet, vis, at vektorfunktionen kan skrives $\overline{V}' = \overline{A} \times \overline{V}$, hvor $\overline{A}$ er en fast vektor, og giv en geometrisk beskrivelse af den ved vektorfunktionen bestemte lineære afbildning, idet alle vektorer afsættes fra samme punkt O.