# Skoleembedseksamen

## under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1962.

---

### Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

**I.**

1) Vis, at funktionen

$$y = f(x) = \sqrt{1+x^2}\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \tag{1}$$

for $-\infty < x < \infty$ tilfredsstiller differentialligningen

$$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}-1\right) - xy = 0\,. \tag{2}$$

2) Vis, at der findes en potensrække

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

hvis sum tilfredsstiller differentialligningen (2) i intervallet $-\lambda < x < \lambda$, hvor $\lambda$ er rækkens konvergenstal. Find potensrækken samt dennes konvergenstal $\lambda$.

Gør rede for, at denne potensrække i intervallet $-\lambda \leqq x \leqq \lambda$ fremstiller funktionen (1).

3) Find endelig ved hjælp af den fundne række værdien af $f(\frac{1}{2})$, idet der bestemmes to tal $a$ og $b$, således at $a < f(\frac{1}{2}) < b$ og $b - a < 0.003$.

**II.**

For en kvadratisk matrix $\boldsymbol{A}$ af 3. orden,

$$\boldsymbol{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix},$$

vil vi med $r_i = r_i(\boldsymbol{A})$ betegne summen af elementerne i den $i^{\text{te}}$ række og med $s_j = s_j(\boldsymbol{A})$ summen af elementerne i den $j^{\text{te}}$ søjle, altså

$$r_i(\boldsymbol{A}) = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} \quad \text{og} \quad s_j(\boldsymbol{A}) = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j}\,.$$

1) Vis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at $r_1(\boldsymbol{A}) = r_2(\boldsymbol{A}) = r_3(\boldsymbol{A})$, er, at den lineære vektorfunktion, som i et givet koordinatsystem i rummet udtrykkes ved

$$(*) \qquad \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix},$$

har vektoren (1, 1, 1) som egenvektor.

2) Lad også $\boldsymbol{B}$ være en kvadratisk matrix af 3. orden. Vis, at hvis $r_1(\boldsymbol{A}) = r_2(\boldsymbol{A}) = r_3(\boldsymbol{A})$ og $r_1(\boldsymbol{B}) = r_2(\boldsymbol{B}) = r_3(\boldsymbol{B})$, så er også $r_1(\boldsymbol{AB}) = r_2(\boldsymbol{AB}) = r_3(\boldsymbol{AB})$. Vis, under forudsætning af at $\boldsymbol{A}$ har en reciprok matrix, at hvis $r_1(\boldsymbol{A}) = r_2(\boldsymbol{A}) = r_3(\boldsymbol{A})$, så er også $r_1(\boldsymbol{A}^{-1}) = r_2(\boldsymbol{A}^{-1}) = r_3(\boldsymbol{A}^{-1})$.

3) Om $\boldsymbol{A}$ antages her, at $s_1(\boldsymbol{A}) = s_2(\boldsymbol{A}) = s_3(\boldsymbol{A}) = s$. (Derimod er $r_1(\boldsymbol{A})$, $r_2(\boldsymbol{A})$ og $r_3(\boldsymbol{A})$ ikke forudsat lige store.) Vis, at $s$ er en egenværdi for den ved (*) udtrykte lineære vektorfunktion. Vis også, at hvis alle elementer i $\boldsymbol{A}$ er ikke-negative, og $\lambda$ er en vilkårlig egenværdi, så er $|\lambda| \leqq s$. (Hertil kan man benytte uligheden

$$|\lambda|\,|x| \leqq a_{11}|x| + a_{12}|y| + a_{13}|z|$$

og de to analoge, hvor $(x, y, z)$ er en egenvektor hørende til $\lambda$.)