Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1961—62.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Der er givet differentialligningen

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x(x+2)\frac{dy}{dx} + (x+2)y = x^3.$$

Find de polynomier, der tilfredsstiller den tilsvarende homogene ligning, og bestem derefter den givne lignings fuldstændige integral for $x \neq 0$.

Vis, at enhver integralkurve i halvplanen $x > 0$ kan fortsættes hen over Y-aksen, og undersøg, på hvor mange måder dette kan gøres.

II.

En lineær vektorfunktion $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V})$ er defineret for alle rummets vektorer, har altså dimensionen $\varrho = 3$. Med K betegnes systemet af de vektorer, hvis billedvektor er $\boldsymbol{0}$.

1) Vis, at K er et vektorrum.

2) Det forudsættes nu, at K har dimensionen $\varkappa = 1$. Idet der vælges en egentlig vektor $\boldsymbol{k}$ fra K, derpå to vektorer $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$, således at $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k}$ er lineært uafhængige, skal man godtgøre, at $\boldsymbol{i}'$ og $\boldsymbol{j}'$ er lineært uafhængige (benyt definitionen af lineær uafhængighed), samt derved bestemme vektorfunktionens rang ϱ'. — Bestem også ϱ' ved hjælp af teorien for lineære ligningssystemer, idet vektorfunktionen tænkes udtrykt i et vilkårligt parallelkoordinatsystem.

3) Under den yderligere forudsætning, at den lineære vektorfunktion er en symmetrisk tensor, skal man udtrykke den i et sædvanligt retvinklet koordinatsystem med en vektor fra K som tredje grundvektor. Hvilke muligheder foreligger for arten af til tensoren hørende tensorflader?

4) Til antagelserne føjes endelig, at den symmetriske tensor har en dobbelt egenværdi λ. Giv en kort beskrivelse af den ved tensoren bestemte lineære afbildning i rummet, idet alle vektorer afsættes fra samme punkt O.