

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1961.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1) Idet n er et positivt helt tal, skal man opløse polynomiet $x^{2n+1} - 1$ i faktorer såvel inden for det komplekse som inden for det reelle talområde.

2) Idet r er en positiv konstant, skal man finde grænseværdien $f(r)$ for følgen af summer

$$\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{p=1}^n \ln \left| r^2 - 2r \cos \frac{2p\pi}{2n+1} + 1 \right|$$

for $n \rightarrow \infty$.

3) Gør rede for, at man for $r > 1$ har

$$f(r) = \int_0^\pi \ln (r^2 - 2r \cos v + 1) dv.$$

II.

Lad $\mathbf{L} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}$, hvor \mathbf{K} , \mathbf{L} og \mathbf{A} betegner kvadratiske matricer af n . orden. \mathbf{A} 's determinant, $\det \mathbf{A}$, forudsættes $\neq 0$.

Vis: $\det \mathbf{L} = \det \mathbf{K}$.

Med \mathbf{E} betegnes enhedsmatrix af n . orden, medens λ er et vilkårligt reelt tal.

Udtryk matricen $\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}$ på simpel måde ved \mathbf{A} og $\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E}$.

Vis derpå, at \mathbf{L} og \mathbf{K} har samme reduktionsdeterminant, dvs.

$$\det (\mathbf{L} - \lambda\mathbf{E}) = \det (\mathbf{K} - \lambda\mathbf{E}).$$

Summen af elementerne i diagonalen i en kvadratisk matrix kaldes matricens spor.

Giv en kort begrundelse for, at \mathbf{L} og \mathbf{K} har samme spor. (Benyt det foregående resultat.)

III.

A) I en plan er givet to hinanden skærende rette linier k og l .

Om en lineær afbildning af planen på sig selv forudsættes, at den afbilder k på sig selv og l på sig selv.

Udtryk afbildningen i et passende valgt koordinatsystem.

Det forudsættes nu yderligere, at 1 er egen værdi for den tilsvarende lineære vektorfunktion.

Hvad kan da sluttes om den lineære afbildning? Formuler svaret uden henvisning til noget koordinatsystem.

B) I en plan er givet to parallelle rette linier m og n .

Angiv hvilke lineære afbildninger af planen på sig selv, der afbilder både m på sig selv og n på sig selv. — Ved undersøgelsen benyttes med fordel et passende koordinatsystem, men resultatet ønskes formuleret uden henvisning hertil.