Matem. Institut
Blegdamsv. 15

Korr. 16/5

Lektor Jørgensen
Openg:

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1960-61.

PRØVE

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgave nr. 1.

En funktion $y = F(x)$ har værdien 0, når x er et ulige multiplum af $\frac{\pi}{2}$, medens den for alle øvrige værdier af x er defineret ved

$$y = \operatorname{Arctg}(3\,\mathrm{tg}x) - \operatorname{Arctg}(2\,\mathrm{tg}x).$$

Er $F(x)$ vilkårlig ofte differentiabel for alle værdier af x?

Opgave nr. 2.

Vis, at differentialligningen

(1) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x^2 - 2x)\frac{dy}{dx} + y = x^p,$$

hvor p er et helt, ikke negativt tal, har en og kun én løsning $y = f(x)$, som kan udvikles i en konvergent potensrække

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots.$$

Angiv konvergensradius.

Vis, at differentialligningen

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = t^{-p},$$

hvor p er et helt, ikke negativt tal, som fuldstændig løsning har klassen af funktioner $y = g\left(\frac{1}{t}\right)$, hvor $y = g(x)$ er løsning til (1).

Opgave nr. 3. 61

Lad $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ være et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. I det følgende betragtes lineære afbildninger bestemt ved overflødigt

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}.$$

1) Find samtlige sådanne lineære afbildninger, der afbilder parablen $y = x^2$ på sig selv.

2) Undersøg om der blandt de fundne lineære afbildninger findes affiniteter, og angiv i bekræftende fald affinitetsaksen, affinitetsretningen og forvandlingstallet.

Vend!

Opgave nr. 4. 61

De matricer, der omtales i denne opgave, er alle kvadratiske af ordenen $n \times n$.

1) Lad $\boldsymbol{A}$ være en skævsymmetrisk matrix (altså $a_{ij} = -a_{ji}$ for $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ for $i = j$). Vis, at $\boldsymbol{A}^2$ er en symmetrisk matrix.

2) Lad $\boldsymbol{A}$ være en skævsymmetrisk matrix. Vis, at der findes en ortogonal matrix $\boldsymbol{P}$ samt en matrix $\boldsymbol{B}$ således beskaffen, at $\boldsymbol{B}^2$ er en diagonalmatrix, og således at

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{B} \boldsymbol{P}.$$

(Ved løsningen af spørgsmål 2) betaler det sig at foretage en analyse af opgaven og så i øvrigt bruge resultatet fra spørgsmål 1).)