Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1960.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgave nr. 1.

Er følgende 3 uendelige rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{n}\right)^2$$

konvergente eller divergente?

Opgave nr. 2.

For hvilke punkter (x_0, y_0) i (x, y)-planen kan man på grundlag af eksistenssætningen slutte, at der gennem (x_0, y_0) går netop én integralkurve til differentialligningen

$$(e^x + y)\,dx + x\,dy = 0.$$

I hvilken del af (x, y)-planen kan integralkurverne fremstilles ved en ligning af formen $y = f(x)$, og hvor bliver $y = f(x)$ en voksende funktion. Bestem ligningens fuldstændige løsning, og skitser i grove træk integralkurverne gennem $(0, 0)$, $(1, 1-e)$, $(-\ln 2, 0)$ og $(\ln 2, 0)$.

Angiv en løsningsmetode for hver af differentialligningerne

$$(*) \qquad (e^x - 1)\,y\,dx + x\,dy = 0$$

$$(xe^{\frac{y}{x}} + y)\,dx + x\,dy = 0,$$

og gennemfør bestemmelsen af de fuldstændige løsninger så vidt, at der kun mangler udregning af nogle bestemte integraler og eventuelt genindførelse af de oprindelige variable. Det ses, at betingelserne for anvendelse af eksistenssætningen på differentialligningen (*) ikke er opfyldt for punkter på y-aksen. Kan man alligevel på grundlag af eksistenssætningen udtale sig om antallet af løsningskurver gennem disse punkter?

Vend!

spiller næppe nogen rolle

Opgave nr. 3. 61

Lad $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ være et sædvanligt parallelkoordinatsystem i rummet. Lad

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix},$$

hvor

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}$$

være ligningen for en lineær, involutorisk afbildning af rummet på sig selv. (Det oplyses, at en enentydig afbildning af rummet på sig selv kaldes involutorisk, såfremt den er lig med sin omvendte afbildning.)

1) Vis, at $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$, og at $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

2) Vis, at såfremt $\det \mathbf{A} = +1$, da er $a_{rs} = A_{sr}$ og godtgør derpå, at $\lambda = 1$ er egenværdi for matricen $\mathbf{A}$.

3) Vis, at såfremt $\det \mathbf{A} = -1$, da er $a_{rs} = -A_{sr}$ og godtgør derpå, at $\lambda = -1$ er egenværdi for matricen $\mathbf{A}$.

4) Det antages, at $\det \mathbf{A} = +1$. Desuden antages, at koordinatvektoren $\boldsymbol{i}$ netop er en til $\lambda = 1$ hørende egenvektor. Angiv første søjle i matricen $\mathbf{A}$ og vis derpå (idet man f. eks. først betragter matrixelementerne a_{22}, a_{33}, a_{23} og a_{32}), at afbildningen enten er den identiske afbildning eller har $\lambda = -1$ som egenværdi. I sidstnævnte tilfælde skal man angive ligningen for afbildningen i et passende valgt koordinatsystem, og på grundlag af den således fundne ligning give en kort beskrivelse af afbildningen.