PRØVE

Grimen

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1959. / 61

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

En funktion $x = g(y)$ er givet ved

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 < y \leqq a,$$

idet a er en positiv konstant. Giv en løs skitse af funktionens geometriske billede K.

Vis, at der findes en omvendt funktion $y = f(x)$ til den givne, og angiv dens definitionsområde.

Find længden af K mellem punkterne $A\,(0, a)$ og $P\,(x, y)$ på K.

Vis, at omdrejningsfladen F med x-aksen som akse og K som meridiankurve har et areal, og find dette.

Vis, at det af fladen F og planen $x = 0$ begrænsede område Ω af rummet har et volumen, og find dette.

Vis endelig, at det af K og koordinatakserne begrænsede område ω af xy-planen har et areal, og find dette.

II.

Der betragtes kvadratiske matricer $\mathbf{X}$ med 4 rækker og søjler, som tilfredsstiller ligningen

$$\mathbf{X^*JX} = \mathbf{J},$$

hvor $\mathbf{X^*}$ betegner den transponerede af $\mathbf{X}$, og $\mathbf{J}$ er en given matrix med 4 rækker og søjler, hvis determinant er forskellig fra 0, og for hvilken $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$.

Vis, at hvis matricerne $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ og $\mathbf{X} = \mathbf{N}$ tilfredsstiller ligningen, vil $\mathbf{M}^{-1}$ eksistere, og matricerne $\mathbf{M}^{-1}, \mathbf{MN}$ og $\mathbf{M^*}$ vil ligeledes tilfredsstille ligningen.

Vis, at matricen

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & d_{21} & d_{22} \end{Bmatrix}$$

tilfredsstiller ovenstående ligning med

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

når og kun når der for matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{Bmatrix}$$

gælder, at

$$\mathbf{A^*C} = \mathbf{C^*A}, \quad \mathbf{B^*D} = \mathbf{D^*B}, \quad \mathbf{A^*D} - \mathbf{C^*B} = \mathbf{E},$$

hvor $\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$.

---

vend!

III.

Ved en lineær vektorfunktion i planen svarer der til to givne lineært uafhængige vektorer $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ to vektorer, der begge tilhører det mindste af de to ved $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ bestemte vinkelrum. Vis, at vektorfunktionen har en reel egenværdi.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.