

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1958.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1) Med a og b betegnes to reelle konstanter, hvor $b \neq 0$. Lad $f(u)$ være en i intervallet $-\infty < u < \infty$ differentiabel funktion med kontinuert differentialkvotient $f'(u) = \frac{a}{b}$ for alle u . Idet det vides, at ligningen

$$x - az = f(y - bz) \quad (1)$$

har løsningen (x_0, y_0, z_0) , skal man gøre rede for, at det er muligt at afgrænse et akseparallelt parallelepipedum Ω_0 med centrum i (x_0, y_0, z_0) således, at samtlige løsninger (x, y, z) til ligning (1) inden for Ω_0 kan skrives på formen

$$z = \varphi(x, y),$$

hvor $\varphi(x, y)$ har kontinuerte partielle afledede.

2) Vis, at

$$a \varphi'_x(x, y) + b \varphi'_y(x, y) = 1.$$

3) Bestem systemet af skæringskurver mellem fladen (1) og systemet af planer

$$y - bz = u,$$

hvor $-\infty < u < \infty$, og find derved en parameterfremstilling for samtlige løsninger (x, y, z) til ligning (1).

4) Idet det nu yderligere antages, at $f(u)$ er begrænset og $a \neq 0$, skal man vise, at der til et vilkårligt værdisæt (x_0, y_0) svarer præcis een værdi z_0 , således at (x_0, y_0, z_0) tilfredsstiller ligning (1).

II.

Med $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i planen.

1) Vis, at ligningen

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 7 = 0$$

fremstiller en ellipse, og find dennes centrum C .

2) Vis, at der findes højst een affinitet i planen, som til enhedscirkelen

$$x^2 + y^2 = 1$$

lader svare den nævnte ellipse under bevarelse af omløbsretningen, og bestem affinitetsretningen, forvandlingstallet og affinitetsaksen. (Man kan f. eks. betragte de på OC vinkelrette tangenter til cirkelen.)

3) Find den matrixligning, hvorved den fundne affinitet fremstilles i det givne koordinatsystem, og eftervis, at den givne ellipse virkelig er billedet af enhedscirkelen.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.