Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1957/58.

Matematisk analyse og geometri.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

I rummet er givet to flader med ligningerne henholdsvis

$$x^2(y^2+z^2)=1$$

og

$$x^2y=1.$$

Tegn en skitse af de to fladers skæringskurver med XY-planen, og angiv i hvor mange områder rummet deles af de to flader.

Lad Ω være det område, der afgrænses af de to flader, og som indeholder punktet $(2, \frac{1}{3}, 0)$. Find arealet $A(\xi)$ af det plane område, hvori planen $x=\xi$ skærer Ω, og find volumen af Ω.

Idet funktionen $F(x, y, z) = |x|^\alpha$ (hvor α er et reelt tal) er defineret for alle punkter i rummet hvor $x \neq 0$, ønskes bestemt de værdier af α, for hvilke volumenintegralet $\int_\Omega F(x, y, z)\,d\varrho$ er konvergent (benyt f. eks. passende vurderinger af $A(\xi)$). Undersøg også for ethvert α, hvorledes det forholder sig med konvergens af volumenintegralet af $F(x, y, z)$ over det område i rummet, der afgrænses af de to flader og som indeholder koordinatsystemets begyndelsespunkt.

II.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet er givet en hyperboloide med ligningen

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{1^2}=1.$$

Find en parameterfremstilling for hyperboloidens højrefrembringer f gennem punktet $A(4, 0, 0)$.

Find en parameterfremstilling for normalen n til hyperboloiden i et vilkårligt punkt Q af f.

Find en ligning for den flade, normalen n beskriver, når Q gennemløber f. Vis, at denne flade er en ligesidet hyperbolsk paraboloide.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.