

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1957.

Matematisk analyse og geometri.

I.

Skitser groft den i første kvadrant beliggende gren af kurven

$$\sinh x \cdot \sinh y = 1,$$

og bestem skæringspunktet mellem kurvegrenen og dens symmetriakse.

Find y udtrykt ved x , og vis, at for $0 < \alpha < \beta < 1$ vil

$$(A) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} dt$$

være lig arealet af det område, som er begrænset af kurven og X -aksen og linierne $x = -\ln \beta$ og $x = -\ln \alpha$.

Bevis ved hjælp af udtrykket (A) og med benyttelse af bekendte rækkeudviklinger, at der mellem kurvegrenen og koordinataksene findes et (ikke begrænset) område, som har arealet

$$\frac{\pi^2}{4} = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right\}.$$

II.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet er givet fire punkter $O(0, 0, 0)$, $A\left(\frac{9}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4}, 0\right)$, $B\left(\frac{-\sqrt{3}}{4}, \frac{11}{4}, 0\right)$ og $C(0, 0, 1)$ samt ellipsoiden med OA , OB og OC som konjugerede halvdiametre.

Find i parallelkoordinatsystemet $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ koordinaterne til skæringspunktet D mellem ellipsoidens tangentplaner i A , B og C , til skæringspunktet E mellem linien OD og planen ABC samt til skæringspunkterne F og G mellem linien OD og ellipsoiden. Vis, at punkterne F og G deler liniestykket DE harmonisk.

Find endvidere i det retvinklede koordinatsystem ellipsoidens ligning samt koordinaterne til dens toppunkter.

Find endelig i samme koordinatsystem matrixligningen for en lineær afbildning af rummet på sig selv, som afbilder ellipsoiden på sig selv samt linierne OA , OB og OC på tre på hinanden vinkelrette linier gennem O .