Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1956—57.

Matematik 2 (matematisk analyse og geometri).

I.

I xy-planen indføres på sædvanlig måde polære koordinater (r, θ), $r \geqq 0$, således at $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Til et vilkårligt fra begyndelsespunktet O forskelligt punkt P med retvinklede koordinater (x, y) og polære koordinater (r, θ) knyttes den vektor $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(P)$ med længden $\frac{1}{r} e^{r\cos\theta}$, for hvilken vinkelen fra $\boldsymbol{V}$ til $\overrightarrow{OP}$ er lig med $r\sin\theta$ radian.

1) Vis, at de retvinklede koordinater (L, M) for vektoren $\boldsymbol{V}(P)$ er givet ved ligningerne

$$L = \frac{x}{x^2+y^2} e^x \cos y + \frac{y}{x^2+y^2} e^x \sin y\,,$$

$$M = \frac{y}{x^2+y^2} e^x \cos y - \frac{x}{x^2+y^2} e^x \sin y\,.$$

2) Find divergensen af vektorfeltet $\boldsymbol{V}$ i et vilkårligt punkt $P \neq O$.

3) Med $S(\varrho)$ betegnes strømmen af vektorfeltet $\boldsymbol{V}$ ud gennem cirkelen med centrum O og radius ϱ, hvor $0 < \varrho < +\infty$. Idet $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < +\infty$, skal man vise, at $S(\varrho_1) = S(\varrho_2)$. (Man kan f. eks. betragte de fire områder, hvori koordinatakserne deler cirkelringen, der afgrænses ved ulighederne $\varrho_1 \leqq r \leqq \varrho_2$.)

4) Fremstil $S(\varrho)$ som et bestemt integral, og find derved

$$\lim_{\rho \to 0} S(\varrho)\,.$$

Den benyttede sætning ønskes formuleret.

5) Find

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta)\, d\theta\,.$$

II.

En ellipse er givet ved et par konjugerede diametre AB og CD. Endvidere er der givet et punkt P forskelligt fra ellipsens centrum og beliggende indenfor ellipsen. Konstruer gennem P en linie l, der skærer ellipsen i R og S således, at $PR = PS$. Konstruer dernæst en tangent til ellipsen i et af de fundne skæringspunkter mellem l og ellipsen.

Konstruktionen ønskes udført på et af de påtegnede ark og vedlagt besvarelsen. Det andet ark kan anvendes som kladde.
