Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1955—56.

Matematisk analyse og geometri.

I.

Bestem definitionsmængden for funktionen

$$y = \sin(\operatorname{Arc\,tg} x),$$

og vis, at den herved fremstillede kurve er en del af en algebraisk kurve. Angiv en potensrække, som fremstiller funktionen i en omegn af $x = 0$; anfør rækkens konvergenstal og udregn koefficienterne til de første led af rækken, til og med leddet med x^5.

II.

Med $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ betegnes et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i en plan π. Om en lineær afbildning af π på sig selv er givet:

a) Linien $2x + y = 0$ har som billede linien $x = 6$.

b) Billedet af linien $2x + y + 10 = 0$ indeholder punktet O.

c) Cirklen $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ har som billede ellipsen

(1)
$$\frac{(x-a)^2}{b^2} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1.$$

d) Arealforholdet er positivt.

Bestem (ikke nødvendigvis i den nævnte rækkefølge):

1) Konstanterne a og b.
2) Billedet O' af O.
3) Billederne $\boldsymbol{i}'$ og $\boldsymbol{j}'$ af henholdsvis $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$.
4) Ligningen for ellipsen (1) i koordinatsystemet $(O', \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$.
5) Den matrixligning, som i koordinatsystemet $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ fremstiller den lineære afbildning.
6) Den linie, hvis billede er X-aksen, samt længdeforholdet ved afbildningen af denne linie.
7) Afbildningens målestokselllipse.

III.

Bevis, at hvis $f(x)$ og $g(x)$ er definerede og differentiable for alle positive x, og hvis $f'(x) \to A$ og $g'(x) \to B$ for $x \to \infty$, og $B \neq 0$, så vil

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B} \qquad \text{for } x \to \infty.$$

(Betragt for eksempel først specialtilfældet $g(x) = x$).