

Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1955.

Matematisk analyse og geometri.

I.

Vis, at differentialligningen

$$2 \sin^2 x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin 2x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

i hvert af de områder, hvori planen deles af linierne $x = p\pi$, $p = 0, \pm 1, \dots$, har løsningen $y = \frac{1}{\sin x}$. Find dernæst i disse områder det fuldstændige integral til differentialligningen

$$2 \sin^2 x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin 2x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = 3 \cos 2x \cdot (1 - \cos 2x).$$

Vis, at der findes uendelig mange integralkurver til denne differentialligning, som forløber tværs over hele strimmelen $-\pi < x < \pi$, og angiv disse integralkurver.

II.

Med $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ betegnes et sædvanligt retvinklet xy -koordinatsystem i planen.

1) Find ligningen i koordinatsystemet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ for den parabel π , hvis ledelinie er linien $x - y = 1$, og hvis brændpunkt er punktet $(-2, 1)$. Vis, at dens tangent m i punktet A med koordinaterne $(0, 3)$ er y -aksen.

2) Vis, at ligningen

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 60x + 20y + 300 = 0$$

i koordinatsystemet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ fremstiller en parabel π' med toppunkt i punktet $A'(6, -2)$ og linien l' med ligningen $x - 2y = 10$ som akse. (Man kan begynde med at parallelforskyde koordinatsystemet således, at A' bliver begyndelsespunkt).

3) Med Λ betegnes den lineære afbildning af xy -planen på sig selv, ved hvilken billederne af parablen π , punktet A og toppunktet B af π er henholdsvis parablen π' , punktet A' og det punkt B' , som i koordinatsystemet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ har koordinaterne $(6, 3)$.

a) Find billedet m' af linien m ved afbildningen Λ , og find den linie l , hvis billede er aksens l' for parablen π' .

b) Find billedet ved Λ af det parallelogram, i hvilket A og B er modstående vinkelspidser, og hvis sider er parallelle med m og l . Find tillige målestoksforholdene for linierne l og m , og find afbildningens arealforhold.

c) Find billedet O' af O , og angiv den matrixligning, der i koordinatsystemet $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ fremstiller Λ .