Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1954—55.

Matematisk analyse og geometri.

I.

1) Gør rede for, hvad eksistens- og entydighedssætningen for differentialligninger af første orden udsiger om integralkurverne til differentialligningen

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)dx+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=0,$$

og angiv dennes singulære punkter.

2) Find det fuldstændige integral til differentialligningen, skitser integralkurverne og undersøg, om der går integralkurver gennem de singulære punkter.

3) Vis endelig, at en halvlinie, der udgår fra begyndelsespunktet, og som ikke ligger på X-aksen, skærer integralkurverne under samme vinkel.

II.

Sædvanlige retvinklede koordinater i planen. Lad E_1 betegne kurven med ligningen

$$5x^2+5y^2+6xy-24x-8y+24=0$$

og E_2 kurven med ligningen

$$13x^2+37y^2+30xy-48x-16y+32=0.$$

1) Vis, at E_1 og E_2 er ellipser med samme centrum og samme areal.

2) Vis, at man ved en lineær afbildning A, bestående af en egentlig flytning efterfulgt af en ret affinitet med X-aksen som affinitetsakse, kan føre E_1 over i enhedscirklen $x^2+y^2=1$, og bestem akseretningerne for den ellipse E_2', hvori E_2 går over ved A.

3) Find — enten ved hjælp af 2) eller direkte — to retninger, der er konjugerede retninger både med hensyn til E_1 og E_2.

4) Vis, ved benyttelse af 1) og 3), at der findes en lineær afbildning af planen på sig selv, som er identisk med sin omvendte afbildning, og som fører E_1 over i E_2.