

S K O I E E M B E D S E K S A M E N

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1953.

Matematisk analyse og geometri.
Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Sædvanlige retvinklede koordinater i rummet.
Tangenten i det til parameterværdien t svarende punkt P_t af kurven
 $x = \cos t, y = \sin t, z = t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$

skærer xy -planen i et punkt, som betegnes med Q_t . Det fladestykke, som beskrives af det variable liniestykke $P_t Q_t$, når t gennemløber parameterintervallet, betegnes med F .

- 1) Vis, at Q_t beskriver et stykke af en cirkelafvikler, og udregn længden af dette.
- 2) Find længden af den kurve, som midtpunktet M_t af $P_t Q_t$ beskriver.
- 3) Vis, at normalen i alle punkterne af F danner samme vinkel med z -aksen og find denne.
- 4) Find arealet af F .
- 5) Find fladeintegralet over F af funktionen $G(x, y, z) \sin z$.

II.

Sædvanlige retvinklede koordinater i rummet.
Revis, at en tensor (lineær vektorfunktion) $f(V)$ er symmetrisk (d.v.s. opfylder betingelsen $f(V) = f(V)$) for vilkårlige vektorer V og V' da og kun da, når tensorens matrix er symmetrisk.

I det følgende betragtes sammen med en tensor $f(V) = f(V)$ den lineære afbildning af rummet på sig selv, der bestemmes ved tensoren, når vektorerne V og V' afsættes fra koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Angiv den værdi d må have, når der skal findes en symmetrisk tensor, som overfører $(0, 1, 0)$ og $(d, 2, 0)$ i henholdsvis $(0, d, 1)$ og $(d+2, 2, 0)$. Revis, at billedpunktet af $(0, 1, \pm 1)$ ved den til en sådan tensor svarende afbildning må ligge på en vis ret linie, og bestem denne. Når det desuden forlanges, at afbildningens volumenforhold skal være 8, kommer som billedpunkt af $(0, 1, \pm 1)$ kun eet punkt i betragtning; bestem dette.

Vis, at der findes en og kun en tensor, som opfylder disse krav (f. eks. ved at bestemme dens matrix). Find en ret linie gennem begyndelsespunktet, som afbildes på sig selv ved den til denne tensor svarende afbildning. Angiv endvidere afbildningens arealforhold for hver af de tre planer, som afbildes på sig selv.