SKOLEEMBEDSEKSAMEN
under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets
matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. December 1952.

Matematisk analyse og geometri.

I.

Angiv på en figur de områder, hvor funktionen

$$f(x,y)=(x+y\div 2)(4x+3y+2)(3x+2y+1)$$

er positiv, og vis derved, at $f(x,y)$ har mindst eet relativt maksimum.

Vis, at koordinaterne til et vilkårligt ekstremumspunkt for $f(x,y)$ tilfredsstiller ligningerne

$$(4x+3y+2)(3x+2y+1)=\div(3x+2y+1)(x+y\div 2)=(x+y\div 2)(4x+3y+2),$$

og vis dernæst, at $f(x,y)$ har netop eet relativt maksimumspunkt (x_0,y_0).

Vis, at det fundne punkt (x_0,y_0) er det punkt i det indre af trekanten med sider $x+y\div 2=0$, $4x+3y+2=0$ og $3x+2y+1=0$, hvor produktet af afstandene til trekantens sider er størst, og angiv størsteværdien af dette produkt.

Vis, at de punkter i (x,y)-planen, hvor niveaukurverne $f(x,y)=c$ har tangent parallel med X-aksen, ligger på et keglesnit, der passerer gennem trekantens vinkelspidser og punktet (x_0,y_0), og forklar, hvorledes man ved et simpelt geometrisk ræsonnement kan slutte, at dette keglesnit er en hyperbel.

II.

Find ligningen for den omdrejningskegle K, der fremkommer ved drejning af X-aksen omkring linien $x=z\sqrt{3}$, $y=0$.

En variabel ret linie l skærer linien $x=1$, $y=0$ under ret vinkel, og er tangent til K. Vis, at den kurve, som røringspunktet beskriver, er plan (idet man ser bort fra $z=0$), og angiv dens art og beliggenhed.

Vis, at den af l frembragte flade er en algebraisk flade, og angiv dens ligning.