Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1951/52.

Matematisk analyse og geometri.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1. I det tredimensionale rum benyttes et semipolært koordinatsystem (θ, r, z). Et område Ω er defineret ved ulighederne

$$\alpha \leqq \theta \leqq \beta; \quad 0 \leqq f_1(\theta) \leqq r \leqq f_2(\theta); \quad F_1(\theta, r) \leqq z \leqq F_2(\theta, r),$$

hvor $0 < \beta - \alpha \leqq 2\pi$, og $f_1(\theta)$ og $f_2(\theta)$ er to i intervallet $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ kontinuerte funktioner, som i det indre af dette interval tilfredsstiller betingelsen $f_1(\theta) < f_2(\theta)$, medens $F_1(\theta, r)$ og $F_2(\theta, r)$ er to funktioner, som er kontinuerte i de variable θ og r, når (θ, r) tilhører det ved $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$; $f_1(\theta) \leqq r \leqq f_2(\theta)$ definerede område; i det indre af dette område forudsættes $F_1(\theta, r) < F_2(\theta, r)$.

I (r, z)-planen tænkes for enhver fast værdi af θ området

$$f_1(\theta) \leqq r \leqq f_2(\theta); \quad F_1(\theta, r) \leqq z \leqq F_2(\theta, r)$$

homogent belagt med masse. Lad $A(\theta)$ betegne arealet af dette område, og lad $g(\theta)$ betegne afstanden fra z-aksen til dets tyngdepunkt. Vis, at rumfanget V af området Ω er givet ved

$$V = \int_\alpha^\beta g(\theta) A(\theta)\, d\theta.$$

2. Lad nu Ω være defineret ved ulighederne

$$\alpha \leqq \theta \leqq \beta; \quad r^2 + z^2 \leqq (f(\theta))^2; \quad r \geqq 0,$$

hvor $f(\theta)$ er en i intervallet $\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ kontinuert funktion, som er positiv i det indre af dette interval. Vis, at rumfanget af Ω er givet ved

$$V = \frac{2}{3}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^3\, d\theta.$$

3. Beskriv det ved

$$r^2 + z^2 \leqq a^2(1 - \cos\theta)^2; \quad r \geqq 0$$

definerede område, og udregn dets rumfang.

II.

Sædvanlige retvinklede koordinater i rummet.

En omdrejningskegle har den rette linie med parameterfremstillingen

$$(x, y, z) = (2 + t,\ 2 + 2t,\ -t)$$

som akse og planen π med ligningen

$$8x + 4y - 5z = 3$$

er en af dens tangentplaner. Find

1) koordinaterne til keglens toppunkt;
2) en parameterfremstilling for den frembringer, langs hvilken π rører keglen;
3) ligningen for normalplanen til π gennem keglens akse;
4) cosinus til keglens halve åbningsvinkel.