Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1950.

Matematisk analyse og geometri.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1) Reducer den kvadratiske form

$$6x^2 + 9y^2 + 26z^2 - 4xy + 8xz - 16yz$$

og bestem en reducerende ortogonal substitution.

2) Idet $\mathbf{A}$ er en ortogonal matrix og $\mathbf{K}$ en symmetrisk matrix, for hvilke $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{A}$ er diagonalmatricen

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{Bmatrix},$$

skal man vise, at for m positiv hel er $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{K}^m\mathbf{A}$ diagonalmatricen

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^m \end{Bmatrix}.$$

3) Ved hjælp af 1) og 2) skal man reducere den kvadratiske form

$$56x^2 + 149y^2 + 756z^2 - 124xy + 288xz - 576yz$$

og angive en reducerende ortogonal substitution.

4) Idet $\mathbf{K}$ er en symmetrisk matrix med reduktionsdeterminanten

$$R(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

skal man ved hjælp af 2) vise, at

$$(-1)^n\mathbf{K}^n + c_{n-1}\mathbf{K}^{n-1} + c_{n-2}\mathbf{K}^{n-2} + \cdots + c_1\mathbf{K} + c_0\mathbf{E} = \mathbf{O},$$

hvor $\mathbf{E}$ er enhedsmatricen og $\mathbf{O}$ nulmatricen.

vend!

II.

I et sædvanligt retvinklet koordinatsystem betragtes rumkurven

$$x = 2t^2$$
$$y = \frac{4}{3}t^3 \qquad\qquad -\infty < t < \infty.$$
$$z = t^4$$

Vis, at kurven er differentiabel for $t \neq 0$ og har en spids for $t = 0$. Angiv spidstangenten.

Bestem længden af buen svarende til parameterintervallet $0 \leq t \leq 1$.

Bestem for $t = 1$ kurvens oskulationsplan og dens krumningscentrum.

En variabel ret linie skærer X-aksen under ret vinkel og gaar gennem det til parameterværdien t svarende kurvepunkt ($t \neq 0$). Angiv en parameterfremstilling for den af denne linie frembragte flade, og find den dertil svarende første fundamentalform. Vis, at fladen er del af en algebraisk flade, og bestem dennes ligning.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.