Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Juni 1949.

Matematisk analyse og geometri.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Sædvanlige retvinklede koordinater i rummet.

Et punkt P gennemløber en kurve k, idet dets projektion på XY-planen monotont gennemløber den i første kvadrant liggende delbue af cirklen $x^2 + y^2 = a^2$, og dets projektion Q på YZ-planen falder på kurven $y = a \sin \frac{z}{a}$, $0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2} a$.

1) Beregn længden af k.

2) Angiv en parameterfremstilling for den flade, som dannes af tangenterne til k, og opskriv den tilsvarende første fundamentalform.

3) Beregn arealet af det fladestykke f, som PQ beskriver.

4) Beregn volumen af det område, som begrænses af f, XY-planen, YZ-planen og fladen $x^2 + y^2 = a^2$.

5) Find hovedkrumningerne, middelkrumningen og krumningsmålet for f i midtpunktet M af PQ, når $PQ = \frac{a}{2}$.

II.

Lad $\boldsymbol{A}$ være en egentlig, symmetrisk, kvadratisk matrix af m^{te} orden ($m > 1$) med konstante elementer. Vis, at determinanten

$$\left|\begin{array}{c|ccc} 0 & x_1 & x_2 \cdots & x_m \\ \hline x_1 & & & \\ x_2 & & & \\ \cdot & & \boldsymbol{A} & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ x_m & & & \end{array}\right|$$

af $(m+1)^{\text{te}}$ orden er en kvadratisk form i de variable $x_1, x_2, \cdots, x_m$, og angiv elementerne i denne forms matrix.

Vis, at summen $P(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ af denne kvadratiske form og den kvadratiske form med matricen $\boldsymbol{A}$ er et nulpolynomium, hvis $\boldsymbol{A}$ er egentlig ortogonal. Vis omvendt, at hvis $P(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ er et nulpolynomium og $m > 2$, er $\boldsymbol{A}$ en egentlig ortogonal matrix. (Benyt f. ex. en sammenligning af $\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{A}^{-1}$.)

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.