Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1948/49.

Matematisk analyse og geometri.

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1. Vis, at den talfølge, hvis n^{te} element er

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

hvor a er et fast positivt tal, er begrænset.

2. Vis, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt{n + (\log x)^2}} \cos(2\pi x^n)$$

er absolut konvergent i intervallet $0 < x < \infty$.

3. Vis, at rækken er ligelig konvergent i ethvert lukket, begrænset delinterval af intervallet $0 < x < \infty$.

4. Undersøg, om den ved rækken fremstillede funktion er begrænset i intervallet $0 < x < \infty$.

II.

Sædvanlige retvinklede koordinater i planen. En lineær afbildning af planen på sig selv, er bestemt ved, 1) at ellipsen

$$9(x-3)^2 + y^2 = 9$$

er billede af cirklen

$$x^2 + (y-3)^2 = 5$$

således, at når et punkt gennemløber cirklen, vil dets billedpunkt gennemløbe ellipsen i samme omløbsretning, og 2) at linien

$$l\colon\ 2x - y + 13 = 0$$

har en linie l',

$$l'\colon\ y = a, \text{ hvor } a < 0,$$

som billede.

1. Find de punkter, som afbildes i ellipsens toppunkter. (Man kan benytte, at l' er parallel med en akse i ellipsen).
2. Find længdeforholdet ved afbildningen af l på l' og find afbildningens arealforhold.
3. Find koordinaterne til toppunkterne af den målestoksellipse, som har centrum i $(1, 1)$.
4. Find a.
5. Find koordinaterne til billedet O' af begyndelsespunktet O.
6. Undersøg, om der på l findes et punkt, som afbildes i sig selv.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.