Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1963.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

1, I.

1) Find i hvert af intervallerne $-\infty < x < 0$, $0 < x < 1$ og $1 < x < \infty$ det fuldstændige integral til differentialligningen

$$(x-1)x\,\frac{dy}{dx} = xy + x - y.$$

2) Vis, at enhver af de fundne funktioner kan tillægges en sådan værdi for $x = 0$, at den derved fremkomne funktion er kontinuert for $x = 0$. Undersøg, om der blandt de således definerede funktioner findes nogle, der tilfredsstiller differentialligningen for $x = 0$.

3) Vis, at enhver af de integralkurver, der forløber i halvplanen $x > 1$ har to asymptoter og bestem disse.

1, II.

1) Gør rede for, at rækken

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \qquad (1)$$

er konvergent.

(fortsættes)

(fortsat)

2) Bestem summen af rækken ved hjælp af skridtene (a) og (b).

(a). Det forudsættes bekendt, at for $-1 < x < 1$ gælder

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + - \dots .$$

Lad $g(t)$ være defineret ved

$$g(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad -\infty < t < \infty .$$

Ved ledvis integration (gør rede for, at dette er tilladt) over intervallet $0 \leqq x \leqq t$, hvor $t < 1$, fås en rækkeudvikling for funktionen $g(t)$ i intervallet $0 \leqq t < 1$.

(b). Gør rede for, at den således fundne rækkeudvikling for $g(t)$ også gælder for $t = 1$.

3) Vis, at for $0 < x < \pi$ er

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \qquad (2)$$

og

$$\sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2 \sin x} .$$

4) Gør rede for, at for ethvert positivt helt tal n er $\frac{\sin 2nx}{2 \sin x}$ integrabel i intervallet $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$.

Idet

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}\,dt,$$

skal man vise (f.eks. ved anvendelse af (2)), at talfølgen

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

er konvergent, samt finde grænseværdien.

(fortsættes)

(fortsat)

5) Vis, at rækken

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \dots$$

er konvergent for $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

6) Idet

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}\,dt \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

skal man vise, at funktionsfølgen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots$$

er konvergent; (man kan bl.a. anvende (2)). Lad grænsefunktionen være $f(x)$.

7) Idet $0 < x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ skal man vise, at

$$f(x_1) = f(x_2).$$

(Man kan anvende, at $\int_0^{x_2} h(t)dt = \int_0^{x_1} h(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} h(t)dt$, hvor $h(t) = \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}$.)

Angiv dernæst $f(x)$ for $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

Der gøres udtrykkelig opmærksom på, at ethvert af spørgsmålene fra nummer 1) til nummer 6) kan besvares helt eller delvist, selvom forudgående spørgsmål ikke er besvaret; blot må man i så fald betragte resultater, der er omtalt i ~~det~~ foregående spørgsmål som sande.