Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets

matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1962-63.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

1, I.

Undersøg om det er sandt, at når rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

Undersøg endvidere om det er sandt, at når rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er betinget konvergent, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

1, II.

Idet n er et positivt helt tal, skal man gøre rede for, at rækken

$$1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} + \dots$$

er konvergent og vise, at rækkens sum er mindre end $1 + \frac{1}{n}$.

Ved f.eks. at anvende ovenstående resultat skal man dernæst undersøge om talfølgen

$$a_1, a_2, \dots , a_n, \dots ,$$

hvor

$$a_n = n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

er konvergent og i bekræftende fald bestemme dens grænseværdi.

(fortsættes)

1, III.

Idet n er et positivt helt tal, skal man vise, at

$$\int_0^x e^{-t}\, t^n\, dt = n!\cdot e^{-x}\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \dots - \frac{x^n}{n!}\right).$$

(Man kan f.eks. betragte differentialkvotienterne af funktionerne på højre og venstre side.)

Idet n er et fastholdt positivt helt tal, skal man vise, at $\int_0^x e^{-t}\, t^n\, dt$ har en grænseværdi for $x \to \infty$, og man skal bestemme denne grænseværdi.

1, IV.

Lad y(x) være en to gange differentiabel funktion med en kontinuert anden afledet, og lad y(x) tilfredsstille differentialligningen

$$y = x\,\frac{dy}{dx} - \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad (1)$$

1) Vis, at enten er $y'(x) = \frac{1}{x}$ eller også vil y(x) tilfredsstille en simpel differentialligning af 2. orden. (Man kan med fordel anvende, at når y(x) tilfredsstiller (1), da vil y(x) også tilfredsstille den differentialligning, der fremkommer ved differentiation af (1).)

2) Under anvendelse af det i 1) fundne resultat skal man dernæst finde samtlige funktioner, der tilfredsstiller (1), og som er to gange differentiable med kontinuerte anden afledede.

3) Vis, at blandt de i spørgsmål 2) fundne funktioner findes der een, der rører alle de øvrige. Tegn en skitse af denne funktion samt af enkelte af de funktioner, den rører.