Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1962.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Idet enhver af funktionerne

$$\sqrt{\frac{1}{x}}, \quad \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3, \quad e^{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}, \quad e^{\frac{1}{x}} \qquad (x > 0)$$

går mod ∞ for $x \to 0$, skal man opstille disse funktioner i en følge

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)$$

efter voksende størrelsesorden, d. v. s. således, at der for $i = 1, 2, 3$ gælder, at

$$\frac{f_i(x)}{f_{i+1}(x)} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0.$$

Ved besvarelsen af opgaven må man (som sædvanlig) uden bevis benytte sætninger, der er bevist i lærebogen. Dog bør det af fremstillingen klart fremgå, hvor sådanne sætninger anvendes.

II.

Lad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{for} \quad 0 < x < \infty \\ 0 & \text{for} \quad x = 0. \end{cases}$$

Vis, at der findes et positivt tal δ, således at funktionen $y = f(x)$ har en omvendt funktion i intervallet $0 \leqq x < \delta$. Idet denne omvendte funktion kaldes $x = \varphi(y)$, skal man vise, at $\varphi(y)$ er to gange differentiabel i intervallet $0 \leqq y < f(\delta)$. Find $\varphi''(0)$.

Vend!

III.

Lad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ være to uendelige rækker med positive led, om hvilke det gælder, at

$$\frac{a_n}{b_n} \to k \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

hvor $k > 0$.

1) Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, når og kun når $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent.

2) Ved f. eks. at anvende ovenstående resultat skal man undersøge, om rækkerne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}$$

er konvergente eller divergente.

Endvidere skal man for ethvert $x \geqq 0$ undersøge, om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + x^{n+1}}{n^2 + n^3 x^n}$$

er konvergent eller divergent.

3) Lad $u_n(x) > 0$ for $n = 1, 2, 3, \cdots$ og for x liggende i et interval I; lad endvidere rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, hvor alle $b_n > 0$, være konvergent, og lad $\frac{u_n(x)}{b_n}$ for $n \to \infty$ konvergere ligeligt i intervallet I mod en grænsefunktion $f(x)$, hvor $f(x)$ er opad til begrænset i intervallet I.

Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ er ligelig konvergent i intervallet I.

Ved f. eks. at anvende ovenstående resultat skal man undersøge, om der findes intervaller beliggende på den positive x-akse, hvori rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + x^{n+1}}{n^2 + n^3 x^n}$$

konvergerer ligeligt.