# Skoleembedseksamen

## under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1961—62.

---

### Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

#### I.

Man har givet funktionen

$$y = f(x) = x^2 \ln \frac{x}{x-1} - x$$

i intervallet $1 < x < \infty$.

1) Vis, at $f(x)$ er positiv og monoton, samt at den har en grænseværdi for $x \to \infty$. Skitser funktionens grafiske billede. (Benyt en passende potensrække ved undersøgelsen.)

2) Gør rede for, at $y = f(x)$ er ligelig kontinuert i intervallet $2 \leqq x < \infty$.

#### II.

1) Vis, at hvis den uendelige række

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-2}{(2n-1)^2} - \frac{2n-3}{(2n)^2} \right) = \left( \frac{0}{1^2} - \frac{-1}{2^2} \right) + \left( \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) + \left( \frac{4}{5^2} - \frac{3}{6^2} \right) + \cdots$$

er konvergent med summen $s$, da gælder dette også rækken

$$\frac{0}{1^2} - \frac{-1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{4}{5^2} - \frac{3}{6^2} + \cdots + \frac{2n-2}{(2n-1)^2} - \frac{2n-3}{(2n)^2} + \cdots.$$

2) Vis, at rækken (1) har afsnitsfølgen

$$s_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n+(n-1)}{(n+n)^2}.$$

3) Vis, at $s_n$ er konvergent, og bestem grænseværdien ved at sammenligne $s_n$ med to passende integraler.

#### III.

1) Vis, at udtrykket

$$\left( \frac{xy^2}{\sqrt{1+(xy)^2}} - y \right) dx + \left( \frac{x^2 y}{\sqrt{1+(xy)^2}} - x \right) dy$$

er et totalt differential i hele $XY$-planen, og bestem den stamfunktion $u(x, y)$, der tilfredsstiller betingelsen $u(0, 0) = 1$.

2) Find værdimængden for funktionen $u(x, y)$ i området $x > 0, y > 0$, og vis, at $u(x, y)$ ikke går mod en grænseværdi, når punktet $(x, y)$ på vilkårlig måde fjerner sig i det uendelige inden for dette område.