Skoleembedseksamen
under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1961.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

1) Vis, at funktionen

$$y = \frac{2x + x^2}{2(1+x)} - \ln(1+x)$$

er voksende i intervallet $-1 < x < \infty$, og find ved at benytte dette monotoniintervallerne for funktionen

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x) - 1.$$

Skitser sidstnævnte funktions grafiske billede.

2) Fremstil $f(x)$ ved en potensrække, og angiv dens konvergenstal. Vis, at der gælder uligheden

$$0 < f(x) < \frac{x^2}{12}$$

for $0 < x < 1$.

3) Talfølgen a_n er defineret ved ligningen

$$n! = a_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

Bestem a_1, a_2 og a_3. Eftervis formlen

$$\ln a_n - \ln a_{n+1} = f\left(\frac{1}{n}\right),$$

og vis, at a_n går monotont mod en positiv grænseværdi.

II.

1) Find extrema for den i hele planen givne funktion

$$z = x^4 + y^4 - x^2 + 2xy - y^2.$$

2) Idet funktionen nu betragtes i området $x^2 + y^2 \geqq 4$, skal man vise, at den har en mindsteværdi, og bestemme denne.