Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1960—61.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgave nr. 1.

Udregn kurveintegralet

$$\int_k \sinh x \sin y \, dx + \cosh x \cos y \, dy ,$$

hvor k er kurven

$$x = t \ln t , \quad y = \frac{\pi}{2} t^2 , \quad 1 \leqq t \leqq 2 .$$

Opgave nr. 2.

I den uendelige række

$$1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{5} + \cdots$$

er $a_{3n} = -\dfrac{1}{2n-1}$, $a_{3n+1} = \dfrac{1}{4n+1}$ og $a_{3n+2} = \dfrac{1}{4n+3}$. Undersøg, om rækken konvergerer.

Opgave nr. 3.

Vis, at kurven

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} - (2n+1) x^n y^n = 0 ,$$

hvor n er et positivt helt tal, har netop én asymptote, og find dennes ligning.

Opgave nr. 4.

En funktion $y = f(x)$ er ligelig kontinuert i et åbent interval $a < x < b$. Vis, at $f(x)$ har en grænseværdi fra højre i a og fra venstre i b.

Opgave nr. 5.

Vis, at hvert af de 8 lukkede vinkelrum, hvori xy-planen deles af koordinatakserne og de rette linier $y = \pm x$, afbildes énentydigt på et område i uv-planen ved funktionsparret

$$u = x^2 + y^2 , \quad v = x^4 + y^4 .$$

Tegn en skitse af billedområdet.