Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1960.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Opgave nr. 1.

Vis, at funktionen $y = x^2 \ln(1+x)$ for $0 < x < \infty$ har en kontinuert omvendt funktion $x = g(y)$, $0 < y < \infty$.

Udregn
$$\int_0^{\ln 2} g(y)\, dy .$$

Opgave nr. 2.

Undersøg om funktionen
$$f(x, y) = \frac{(x+y)^4}{x^4+y^4}, \qquad 0 < x^2 + y^2 < \infty$$
har en største og en mindste værdi, og bestem i bekræftende fald disse værdier.

Opgave nr. 3.

Vis ved hjælp af sætningerne om implicit givne funktioner, at skæringspunkterne for de to flader
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0$$
i omegnen af ethvert fra $(0, 0, 0)$ forskelligt skæringspunkt udgør en differentiabel kurve.

Vis, at skæringskurvens projektion på (x, z)-planen er en parabelbue, og tegn en skitse, som viser denne parabelbues beliggenhed i forhold til de to fladers skæringskurver med (x, z)-planen. Vis derefter, at skæringspunkterne mellem de to flader udgør en ikke plan, lukket kurve uden dobbeltpunkter, og at denne kurve rører (x, y)-planen i begyndelsespunktet.

Opgave nr. 4.

En funktion $f(x)$, som har perioden 2π, er for $|x| \leqq \pi$ defineret ved
$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & |x| \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < |x| \leqq \pi . \end{cases}$$

Bestem funktionens Fourierrække og undersøg, om den er absolut og ligelig konvergent.