Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Sommeren 1959.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

I et sædvanligt retvinklet xyz-koordinatsystem er givet en flade ved

$$z = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array}.$$

Find alle ekstremumspunkter på fladen.

Find ligningerne for projektionerne på xy-planen af niveaukurverne på fladen og af kurverne med størst fald mod xy-planen på fladen.

Bestem de positive værdier af c, for hvilke en skæringskurve mellem planen $z = c$ og fladen har punkter fælles med planen $y = 0$, og find retningen af kurvens tangent i et sådant fællespunkt.

Vis, at en projektion (som ikke er en ret linie) af en kurve med størst fald har to på x-aksen vinkelrette asymptoter; vis endvidere, at en sådan projektion sammen med en af sine asymptoter og x-aksen begrænser et område, som har et areal.

II.

Vis, at hver af de to rækker

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^q}, \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^q},$$

når $q > 1$, er ligelig konvergent for $-\infty < x < \infty$.

Vis endvidere, at når $q > 0$, er rækken (1) konvergent for $x \neq 2p\pi$, p hel, rækken (2) konvergent for $-\infty < x < \infty$, og hver af de to rækker ligelig konvergent i et interval af formen $2p\pi + k \leqq x \leqq 2\pi - k + 2p\pi$, hvor $k > 0$, p hel. (Bevis f. eks. først ved hjælp af formlerne

$$\sum_{j=1}^{n} \cos jx = \frac{\cos \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \sin jx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

at i et sådant interval er afsnittene i hver af de to rækker

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$$

begrænsede).

Vend!

Vis, at rækken

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots\right)$$

har summen $f(x) = (x-\pi)^2$ for $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Find dernæst for $0 \leqq x \leqq 2\pi$ summen af hver af de to rækker

$$\frac{\pi^2}{3}x + 4\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^3} + \ldots\right)$$

og

$$-4\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Find endelig summen af hver af de to rækker

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{n^4} + \ldots$$

og

$$\frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \ldots.$$

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.