Skoleembedseksamen

under det matematisk-naturvidenskabelige fakultets matematisk-fysiske faggruppe.

Forprøven. Vinteren 1958—59.

Matematik 1 (matematisk analyse).

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

I.

Lad $p(x)$ og $q(x)$ være differentiable funktioner med kontinuerte afledede i intervallet $0 < x < \infty$.

Vis, at en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at enhver løsning $y(x)$ $(0 < x < \infty)$ til differentialligningen

$$2\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{1}$$

også er løsning til differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{2}$$

er, at (2) opfylder betingelsen

$$q(x) = \left[\frac{1}{2}p(x)\right]^2 + \frac{1}{2}p'(x). \tag{3}$$

Vi betragter nu differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - 2\right)\frac{dy}{dx} + \left(-\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)y = 0. \tag{4}$$

Vis, at betingelsen (3) er opfyldt for differentialligningen (4) og find derved en enkelt uendelighed af løsninger til (4) i intervallet $0 < x < \infty$.

I det følgende antages det, at $p(x)$ og $q(x)$ tilfredsstiller (3). Vis da, at når $\varphi(x)$ $(0 < x < \infty)$ er en løsning til differentialligningen (1), da vil $x\varphi(x)$ være en løsning til differentialligningen (2).

Find endelig det fuldstændige integral til (4) i intervallet $0 < x < \infty$.

II.

Lad $f(x)$ være en vilkårlig ofte differentiabel funktion i intervallet $-\infty < x < \infty$; lad a være et vilkårligt fast reelt tal, og lad $x = a + h$.

1) Idet det forudsættes kendt, at middelværdisætningen siger, at

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h),$$

hvor $0 < \theta < 1$, skal man for hver af funktionerne $f(x) = x^2$ og $f(x) = e^x$ bestemme θ som funktion af h og derved vise, at θ har en grænseværdi for $h \to 0$ samt finde denne grænseværdi.

Vend!

Ved de to følgende spørgsmål 2) og 3), der kan besvares uafhængigt af hinanden, forudsættes kendt, at

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \tag{1}$$

hvor $0 < \theta < 1$.

2) Man skal da vise, at

$$\frac{h^{n+1}}{n!} \theta f^{(n+1)}(\xi_1) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_2), \tag{2}$$

hvor $\xi_1 = a + \theta_1 \theta h$, $\quad 0 < \theta_1 < 1$ (3)

og $\quad \xi_2 = a + \theta_2 h$, $\quad 0 < \theta_2 < 1$.

Det er det samme θ, der optræder i (1), (2) og (3).
Under forudsætning af, at $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ skal man godtgøre, at θ har en grænseværdi for $h \to 0$ samt bestemme denne.

3) Idet det antages, at der findes en positiv konstant M, således at

$$|f^{(n)}(x)| < M$$

for alle x i intervallet $-\infty < x < \infty$ og alle positive hele tal n, skal man gøre rede for, for hvilke h den uendelige række

$$f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \cdots$$

er konvergent samt angive rækkens sum i tilfælde af konvergens.

Ved bedømmelsen tages hensyn til fremstillingens form. Almindeligvis modtages til bedømmelse kun besvarelser, der er skrevet på de til indskrivning beregnede ark. Kun under særlige forhold, som da må angives, kan kladden afleveres. De dele, som i så fald ønskes taget i betragtning, må være tydeligt afmærkede.